Bacalaureat 2002
Profil: economic, industrial, militar real etc.

Subiectul I (30 p)

1. Se considera functia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+4x+2$
   a) (4p) Sa se verifice ca $f(x)=(x+2)^2-2, \forall x\in\mathbb{R}$
   b) (4p) Sa se rezolve in **R** ecuatia $(f\circ f)(x)=-2$
   c) (2p) Sa se rezolve in **R** ecuatia $f(2^x)=7$.
2. Se considera functia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{x^3}$
   a) (4p) Sa se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$
   b) (2p) Sa se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$
   c) (2p) Sa se arate ca functia f este strict crescatoare pe **R**.
   d) (2p) Sa se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$
3. In sistemul cartezian de coordonate xOy se considera punctele $A(3,4), B(4,3), C(0,5), O(0,0)$.
   a) (3p) Sa se verifice ca $OA=OB=OC$.
   b) (4p) Sa se scrie ecuatia dreptei OA.
   c) (3p) Sa se calculeze panta dreptei AB.

Subiectul II (20 p)

1. Pe multimea numerelor reale definim legea "$\circ$" prin: $x\circ y=xy+2x+2y+2, \forall x,y\in\mathbb{R}$
   a) (4p) Sa se verifice ca $x\circ y=(x+2)(y+2)-2, \forall x,y\in\mathbb{R}$.
   b) (2p) Sa se arate ca $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z), \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.
   c) (2p) Sa se gaseasca doua elemente $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ astfel incat $a\circ b\in\mathbb{N}$.
   d) (2p) Sa se rezolve in $(0,\infty)$ ecuatia $(\log_2 x)\circ(\log_3 x)=-2$.

2. Se considera functia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}$
   a) (3p) Sa se verifice ca $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}, \forall x\in[0,\infty)$.
   b) (3p) Sa se arate ca $f(1)+f(2)+...+f(n)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}, \forall n\in\mathbb{N}^*$
   c) (2p) Sa se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

d) (2p) Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+...+f(n)\right)$.

Subiectul III (20 p)

In multimea $M_2(\mathbb{C})$ se considera matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

a) (4p) Sa se calculeze AB si BA.

b) (4p) Sa se arate ca suma elementelor de pe diagonala principala a matricelor AB si BA este aceeasi.

c) (4p) Sa se arate ca $\det(A+B)+\det(A-B)=2\left(\det(A)+\det(B)\right)$.

d) (4p) Sa se demonstreze ca $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$.

e) (2p) Utilizand metoda inductiei matematice, sa se arate ca:
$\det(A_1A_2...A_n)=\det(A_1)\det(A_2)...\det(A_n), \forall A_1,...A_n\in M_2(\mathbb{C})$ si $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

f) (2p) Sa se arate ca $\det\left(A^n\right)=\det^n(A), \forall A\in M_2(\mathbb{C})$ si $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Subiectul IV (20 p)

Se considera functiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1+x+x^2+...+x^6$ si

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^x f(t)\,dt, \forall x\in\mathbb{R}$.

a) (4p) Sa se calculeze $f(1)$.

b) (4p) Sa se verifice ca $(x-1)f(x)=x^7-1, \forall x\in\mathbb{R}$.

c) (2p) Sa se arate ca $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

d) (4p) Sa se arate ca $F'(x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

e) (3p) Sa se rezolve ecuatia $F(x)=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{7}$.

f) (3p) Sa se arate ca $F(x)<xf(x), \forall x>0$