

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008 - SESIUNEA IUNIE-IULIE
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D_MT1
BAREM DE CORECTARE ȘI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
 Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I (30 puncte) -Varianta 050

1.	$a_1 + a_2 + \dots + a_{2008} = (7 + 6 + 9 + 2 + 3 + 0) \cdot 334 + 7 + 6 + 9 + 2 = 9042.$	4p 1p
2.	Intersecția este dată de sistemul $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 + x + 1 \end{cases}$ din care rezultă ecuația $x^2 - x + 2 = 0$, care nu are soluție, deoarece $\Delta = -7 < 0$.	1p 4p
3.	$\log_4 x^2 = 2 \log_4 x = 2 \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \log_2 x$, deci ecuația devine $\log_2 x = 3$ și are soluția $x = 8$.	3p 1p 1p
4.	Există C_{13}^3 posibilități de alegere a fetelor și C_{12}^2 posibilități de alegere a băieților. Astfel, numărul de moduri în care se poate alcătui comitetul este $C_{13}^3 \cdot C_{12}^2$.	3p 2p
5.	Pantele dreptelor sunt $\frac{1 - (-1)}{-1 - 2} = -\frac{2}{3}$ și $\frac{4 - 3}{a - 1} = \frac{1}{a - 1}$, iar condiția de perpendicularitate este $-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a - 1} = -1$, deci $a = \frac{5}{3}$.	2p 2p 1p
6.	Știm că $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$, iar din $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = -\frac{4}{5}$ rezultă $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -2$ sau $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$, deci $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -2$, deoarece $\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL II (30 puncte) -Varianta 088

1.a)	Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ atunci $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ și $A + A^t = \begin{pmatrix} 2a & b + c \\ b + c & 2d \end{pmatrix}$, deci $\operatorname{Tr}(A + A^t) = 2a + 2d = 2(a + d) = 2 \operatorname{Tr} A$.	1p 2p 2p
b)	$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$, deci, dacă $0 = \operatorname{Tr}(A \cdot A^t) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, atunci $a = b = c = d = 0$, adică $A = O_2$.	3p 2p
c)	Din punctul b) , suma elementelor matricei $A \cdot A^t$ este $s = (a + c)^2 + (b + d)^2$.	1p

	Dacă $s=0$ atunci $a+c=0, b+d=0$, deci $c=-a, d=-b$.	2p
	Rezultă $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ -a & -b \end{vmatrix} = -ab + ab = 0$.	2p
2.a)	$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, deci $A^2 = 7 \cdot I_2 + 0 \cdot A \in K$	3p 2p
b)	Fie $X, Y \in K$, $X = aI_2 + bA, Y = cI_2 + dA$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Atunci $XY = acI_2 + (ad + bc)A + bdA^2 = (ac + 7bd)I_2 + (ad + bc)A \in K$, căci $ac + 7bd, ad + bc \in \mathbb{Q}$.	2p 3p
c)	Folosind notațiile de la b), avem condițiile $ac + 7bd = 1, ad + bc = 0$ și $a \neq 0$ sau $b \neq 0$. Sistemul obținut are determinantul $\begin{vmatrix} a & 7b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - 7b^2$ care este nenul deoarece, dacă $a \pm b\sqrt{7} = 0$ și $a, b \in \mathbb{Q}$ atunci $a = b = 0$.	2p 1p 2p

SUBIECTUL III (30 puncte) - Varianta 076

1.a)	Considerăm $L = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Avem $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x(\sqrt{1 + x^{-1} + x^{-2}} + \sqrt{1 - x^{-1} + x^{-2}})} = \frac{2}{2} = 1$.	2p 3p
b)	Avem $f'(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$, iar ecuația $f'(x) = 0$ nu are soluții, deci derivata funcției are semn constant. Cum $f'(0) > 0$, deducem că $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce arată că funcția este strict crescătoare.	3p 1p 1p
c)	$f(1) + \dots + f(n) = (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}) = \sqrt{n^2 + n + 1} - 1$, ceea ce se arată prin inducție, sau observând că $f(k) = \sqrt{k^2 + k + 1} - \sqrt{(k-1)^2 + (k-1) + 1}$. Apoi, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} - 1}{n} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + n^{-1} + n^{-2}} - n^{-1}) = 1$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2 + n + 1} - 1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} - n - 1}{n} \right)^{\frac{n}{\sqrt{n^2 + n + 1} - n - 1}} = e^{-\frac{1}{2}}$	1p 1p 1p 2p
2.a)	$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big _0^1 = \frac{1}{3}$	4p 1p
b)	$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 x^{n-1} (x\sqrt{1-x^2}) dx = -\frac{1}{3} x^{n-1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big _0^1 + \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-2} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$ $= \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-2} (1-x^2) \sqrt{1-x^2} dx = \frac{n-1}{3} (I_{n-2} - I_n)$, de unde rezultă $3I_n + (n-1)I_n = (n-1)I_{n-2}$, deci concluzia.	3p 1p 1p
c)	Avem $I_n \geq 0$ și $I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.	1p 3p 1p

- ◆ Total: 100 de puncte, din care 10 sunt din oficiu.
- ◆ Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.