# Varianta 3

**Subiectul I.**

**a)** $\left|(1-i)^4\right| = 4$

**b)** Distanța căutată este $\sqrt{2}$

**c)** Ecuația tangentei în $P$ la hiperbolă este $x-y=1$.

**d)** Punctul $C$ aparține cercului $\Leftrightarrow$ $a=2$.

**e)** Aria căutată este $S_{ABC}=2$.

**f)** $a=-1$, $b=0$.

**Subiectul II.**

**1.**

**a)** $x=0$.

**b)** 0.

**c)** $(f\circ f)(1)=0$.

**d)** Probabilitatea cerută este $\frac{2}{5}$.

**e)** În $\mathbf{Z_8}$ avem: $\hat{0}+\hat{1}+...+\hat{7}=\hat{4}$.

**2.**

**a)** $f'(x)=\frac{2x}{x^2+3}$, pentru $x\in\mathbf{R}$.

**b)** $\int_0^1 f'(x)\,dx=\ln\frac{4}{3}$.

**c)** Pentru $x\in[0,\infty)$, avem $f'(x)\geq 0$, deci $f$ este strict crescătoare pe $[0,\infty)$.

**d)** $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{2}$.

**e)** Funcția $f$ are un singur punct de extrem local şi anume $x=0$.

**Subiectul III.**

**a)** Evident.

**b)** Evident, $A,B\in M_3(\mathbf{N})$ $\Rightarrow$ $A+B\in M_3(\mathbf{N})$, suma a două numere naturale fiind un număr natural.

**c)** Evident, $A,B\in M_3(\mathbf{N})$ $\Rightarrow$ $A\cdot B\in M_3(\mathbf{N})$,

**d)** $\det(E)=1$.

**e)** $C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\in M$ are rangul 1, iar $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\in M$ are rangul 2.

**f)** $\det(E)=1\neq 0$, deci $E$ este o matrice inversabilă în $M_3(\mathbf{R})$.

$$E^{-1}=\frac{1}{\det(E)}\cdot E^{*}=E^{*}=\begin{pmatrix}1 & -2 & e_{13}\\ e_{21} & e_{22} & e_{23}\\ e_{31} & e_{32} & e_{33}\end{pmatrix}\notin M\text{, deoarece } -2\notin \mathbf{N}\ .$$

**g)** Presupunem că $X$ are o linie cu cel puțin două elemente nenule.
Fără a restrânge generalitatea, putem considera că prima linie a matricei $X$ este
$\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}$, cu $a, b\in \mathbf{N}^{*}$. Notăm cu $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ prima coloană a matricei $X^{-1}$.

Făcând efectiv înmulțirea, obținem $x\neq 0$ şi $y\neq 0$, deci $ax+by+cz\geq 2$, contradicție cu $ax+by+cz=1$.
Rezultă că fiecare linie a matricei $X$ are exact un element nenul.
Analog obținem că şi fiecare coloană a lui $X$ conține un singur element nenul.
Aşadar $X$ are exact trei elemente nenule, situate pe linii şi pe coloane diferite.
Fie $\alpha, \beta, \gamma\in \mathbf{N}^{*}$ aceste trei elemente. Atunci $\det(X)=\alpha\beta\gamma$ sau $\det(X)=-\alpha\beta\gamma$. şi deoarece $\det(X\cdot X^{-1})=\det(X)\cdot\det(X^{-1})=1$, deducem că $\det(X)\in\{-1,1\}$ şi de aici $\alpha=\beta=\gamma=1$, de unde rezultă concluzia.

**Subiectul IV.**

**a)** $f'(x)=\ln a-\dfrac{a}{x}$, $x>0$.

**b)** $f(a)=0$, $f'(a)=\ln a-1$.

**c)** Alcătuind tabelul de variație al funcției $u:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $u(x)=x-e\cdot\ln x$ se deduce că $x=e$ este punct de minim global pentru funcția $u$, de unde rezultă concluzia.

**d)** $f(x)\geq 0$, $\forall x\in(0,\infty)$ $\Leftrightarrow$ $x=a$ este punct de minim pentru funcția $f$.
Din teorema lui *Fermat* rezultă că $f'(a)=\ln a-1=0$, deci $a=e$.
Reciproc, din punctul **c)** deducem că pentru $a=e$ avem $f(x)\geq 0$, $\forall x\in(0,\infty)$.
În consecință, soluția este $a=e$.

**e)** Integrând pe intervalul $[1,2]$ inegalitatea obținută la **c)**, rezultă concluzia.

**f)** $e^{x}=x^{e}$ $\Leftrightarrow$ $x\cdot\ln e=e\cdot\ln x$ $\Leftrightarrow$ $u(x)=0$ $\overset{c)}{\Leftrightarrow}$ $x=e$.

**g)** Înlocuind în **c)** $x$ cu fiecare din numerele $b, c, d$ şi folosind **f)**, obținem $b=c=d=e$.