EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….003**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze numărul complex $z_1 + z_2$, unde $z_1 = 1 + i$ și $z_2 = -1 + i$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea segmentului cu extremitățile în punctele $A(2,-2)$ și $C(-2,2)$.

(4p) **c)** Să se determine partea reală a numărului complex $i^5 + i^6 + i^7 + i^8$.

(4p) **d)** Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât dreptele $d_1 : x + y = 0$ și $d_2 : x + \alpha \cdot y = 0$ să fie perpendiculare.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2,-2)$, $B(1,1)$ și $C(-2,2)$.

(2p) **f)** Să se calculeze raza cercului $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze inversul față de înmulțire al elementului $\hat{5}$ în inelul $(\mathbf{Z}_9, +, \cdot)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\dfrac{5!-4!}{2!}$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_9 x = 2$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2} - 9^x = 0$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $3^n \le 20$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x + 1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} \dfrac{25n^2 + 3}{2n^2 - 3}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $A + I_2 = B$.

(4p) **b)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(4p) **c)** Să se verifice că $A^2 = A$.

(2p) **d)** Să se calculeze A^{2007}.

(2p) **e)** Utilizând eventual metoda inducției matematice, să se arate că $B^n = I_2 + (2^n - 1)A$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că $aA + bB + cI_2 \neq C$, $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se arate că matricea $X = A^n + B^n$ este inversabilă $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, definite prin $f(x) = \cos x$ şi $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$ şi $g'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f^2(x)dx$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g^2(x)dx$.

(2p) **d)** Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției g.

(2p) **e)** Să se arate că $t^2 \cos^2 x - 2t\dfrac{\cos x}{x} + \dfrac{1}{x^2} \geq 0$, $\forall\, t \in \mathbf{R}$, $\forall\, x > 0$.

(2p) **f)** Integrând inegalitatea de la punctul **e)**, să se arate că

$$t^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx - 2t \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2} dx \geq 0, \quad \forall\, t \in \mathbf{R}.$$

(2p) **g)** Să se arate, utilizând eventual punctul **f)**, că

$$\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx \right)^2 \leq \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2} dx \right).$$