# Derivarea funcției inverse. Exerciții rezolvate

**Obs.1.** Dacă $f: I \to J$ este o funcție **strict** crescătoare atunci f este injectivă.

Dem: Fie $x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 \neq x_2$.

Dacă $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Dacă $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ $\Rightarrow$ f este injectivă

Concluzie: O metodă de a arăta că o funcție este injectivă este prin a arăta ca ea este strict crescătoare (sau strict descrescătoare).

**Obs. 2.** Fie $f: A \to B$ o funcție. Dacă $\operatorname{Im} f = B$ atunci f este surjectivă

Justificare: Fie $y \in B = \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists x \in A$ astfel încât $f(x) = y$ deci f este surjectivă.

**Obs. 3.** Fie $f: I \to J$ o funcție continuă și bijectivă (deci inversabilă).

Dacă $f$ este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ și $f'(x_0) \neq 0$ atunci $f^{-1}: J \to I$ este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ și are loc egalitatea $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$

Reținem formula $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}}$

**Exerciții rezolvate:**

**Ex. 1.** Fie funcția $f: \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \to \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ prin formula $f(x) = x^2 - x$. Să se arate că f este inversabilă și să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(2)$ și $\left(f^{-1}\right)'(20)$.

**Rezolvare:**

Vârful parabolei este $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow V\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ și parabola are ramurile îndreptate în sus. Graficul funcției este format din jumătatea din dreapta a parabolei. Se obține că funcția este strict crescătoare deci injectivă conform obs.1.

$\operatorname{Im} f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right) = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ deci f este surjectivă conform obs.2.

$\Rightarrow f$ bijectivă $\Rightarrow f$ inversabilă

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3}$$

Trebuie calculat $f^{-1}(2)$.

$f^{-1}(2) = x \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

Obținem $x_1 = 2 \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ și $x_2 = -1 \notin \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

$f'(x) = \left(x^2 - x\right)' = 2x - 1 \Rightarrow f'(2) = 3$

Pentru a doua cerință:

$f^{-1}(20) = x \Rightarrow f(x) = 20 \Rightarrow x^2 - x = 20 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0$

https://variante-mate.ro

Obținem $x_1 = 5 \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ și $x_2 = -4 \notin \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ deci $f^{-1}(20) = 5$

$f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f'(5) = 9$

$$\left(f^{-1}\right)'(20) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(20)\right)} = \frac{1}{f'(5)} = \frac{1}{9}$$

**Ex. 2.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 2$. Există $\left(f^{-1}\right)'(6)$?
În caz afirmativ să se calculeze.

**Rezolvare:**

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x - 3 = (x+1)^3 + x - 3$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ fiind suma a două funcții strict crescătoare și anume

$x \to (x+1)^3$ strict $\nearrow$

$x \to x - 3$ strict $\nearrow$ deci f este injectivă.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 + 3x^2 + 4x - 2\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f este continuă pe $\mathbb{R}$ deci f are proprietatea lui Darboux. Rezultă $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, rezultă că f este surjectivă.

$\Rightarrow$ f bijectivă $\Rightarrow$ f inversabilă.

Din $f(1) = 6$ deducem $f^{-1}(6) = 1$

$f'(x) = \left(x^3 + 3x^2 + 4x - 2\right)' = 3x^2 + 6x + 4$

$f'(1) = 3 + 6 + 4 = 13$

$$\left(f^{-1}\right)'(6) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(6)\right)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{13}$$

**Ex. 3.** Fie funcția $f : (0, +\infty) \to (1, +\infty), f(x) = 2^x + x^2 + x$. Să se verifice dacă f este bijectivă și să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(4)$.

**Rezolvare:**

f este strict cresătoare pe $(0, +\infty)$ fiind suma a trei funcții strict crescătoare pe $(0, +\infty)$.

Rezultă că f este injectivă.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(2^x + x^2 + x\right) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2^x + x^2 + x\right) = +\infty$

f continuă rezultă f are proprietatea lui Darboux rezultă $\operatorname{Im} f$ este interval rezultă $\operatorname{Im} f = (1, +\infty)$ deci f este surjectivă.

$\Rightarrow$ f bijectivă $\Rightarrow$ f inversabilă.

Din $f(1) = 4$ deducem $f^{-1}(4) = 1$

$f'(x) = \left(2^x + x^2 + x\right)' = 2^x \ln 2 + 2x + 1$

$f'(1) = 2\ln 2 + 3$

https://variante-mate.ro

$$\left(f^{-1}\right)'(4)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(4)\right)}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2\ln 2+3}=\frac{1}{3+\ln 4}$$

**Ex. 4.** Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x-1)+x$.

a) Să se arate că f este inversabilă

b) Să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(2)$ și $\left(f^{-1}\right)'(e+2)$

**Rezolvare:**

Fie $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ cu $x_1<x_2$.

$x_1<x_2\Rightarrow x_1-1<x_2-1\Rightarrow \ln(x_1-1)<\ln(x_2-1)$

$$x_1<x_2$$

$$\ln(x_1-1)+x_1<\ln(x_2-1)+x_2 \text{ deci } f(x_1)<f(x_2)$$

Rezultă f este strict crescăoare deci f este injectivă.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\ln(x-1)+x\right)=\ln(0+)+1=-\infty+1=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x-1)+x\right)=\ln(+\infty)+\infty=+\infty$$

f continuă rezultă f are proprietatea lui Darboux rezultă $\operatorname{Im} f$ este interval rezultă $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$ deci f este surjectivă.

$\Rightarrow$ f bijectivă $\Rightarrow$ f inversabilă.

Din $f(2)=2$ deducem $f^{-1}(2)=2$

$$f'(x)=\left(\ln(x-1)+x\right)'=\frac{1}{x-1}+1\Rightarrow f'(2)=2$$

$$\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)}=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{2}$$

Pentru a doua cerință avem:

Din $f(e+1)=e+2$ deducem $f^{-1}(e+2)=e+1$

$$f'(e+1)=\frac{1}{e}+1=\frac{1+e}{e}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(e+2)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(e+2)\right)}=\frac{1}{f'(e+1)}=\frac{e}{e+1}$$

https://variante-mate.ro