

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat de $a_1 \in (0,1)$ și $a_{n+1} = a_n(1 - \sqrt{a_n})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se arate că $a_n \in (0,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p b) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p c) Să se arate că șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, dat de $b_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este mărginit superior de a_1 .

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

5p a) Să se arate că funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, este o primitivă a funcției f .

5p b) Să se calculeze aria suprafeței delimitate de dreptele $x=0, x=1, Ox$ și graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (2x+1)f(x)$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x) dx$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.