SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea matricelor pătratice $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Se notează $A^n = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{de\ n\ ori},\ n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $A + A^2 = 2A$.

5p **b)** Să se determine matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, astfel încât $\det(X + A) = 2$.

5p **c)** Știind că $A^n = A,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $A + 2A^2 + \ldots + nA^n = \frac{n(n+1)}{2} A,\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + mX + 1,\ f \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

Se notează $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine numărul real m astfel încât $x_1 = 2$.

5p **b)** Să se arate că $S_3 + S_2 + mS_1 + 3 = 0$.

5p **c)** Să se arate că pentru orice număr par $m \in \mathbb{Z}$ polinomul f nu are rădăcini raționale.