SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{X\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \middle| X^2=-I_2\right\}$, unde $X^2=X\cdot X$.

5p **a)** Să se verifice că $A\in G$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\left(\frac{1}{2}(X+I_2)\right)^2=\frac{1}{2}X$, oricare ar fi $X\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că orice matrice pătratică de ordinul al doilea cu elemente numere reale pentru care avem $A\cdot X=X\cdot A$ este de forma $X=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, unde $x,y\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+bX+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $c=501$ să se demonstreze că $f(1)+f(-1)=1004$.

5p **b)** Pentru $a=-2$, $b=2$ și $c=-1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

5p **c)** Să se demonstreze că nu există valori reale ale coeficienților a, b, c astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul $g=X^3-X$.