SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, x real și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se notează $A_x^2 = A_x \cdot A_x$.

5p **a)** Să se determine valorile reale ale numărului x pentru care $\det(A_x) = 0$.

5p **b)** Sa se determine numărul real x astfel încât $A_x^2 = I_2$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A_x^2 = 2xA_x + (1-x^2)\cdot I_2$.

2. Se consideră inelul de polinoame $\mathbb{Z}_3[X]$.

5p **a)** Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_3$, știind că polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^2 + aX + b$ are rădăcinile $\hat{1}$ și $\hat{2}$.

5p **b)** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$ la polinomul $g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $g = X + \hat{1}$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = \left(a^3 + \hat{2}a\right)X^2 + \hat{2}aX + \hat{1}$, atunci $f\left(\hat{1}\right) = \hat{2}a + \hat{1}$.