Soluții

1. Mai intai observă că $z \neq 0$

$$z^2+z+1=0 \Rightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0 \Rightarrow z^3-1=0 \Rightarrow z^3=1$$

$$z^4=z^3\cdot z=z$$

$$z^4+\frac{1}{z^4}=z+\frac{1}{z}=\frac{z^2+1}{z}=\frac{-z}{z}=-1$$

2. $f(x)=ax+b, a\neq 0$

$$f\left(f(x)\right)=2f(x)+1 \Leftrightarrow f\left(ax+b\right)=2(ax+b)+1 \Leftrightarrow a(ax+b)+b=2(ax+b)+1$$

$$\Leftrightarrow a^2x+ab+b=2ax+2b+1, \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2=2a \\ ab+b=2b+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ 2b+b=2b+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=2x+1$$

3. Punem condiții de existență:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x\in(0,+\infty)$$

Pentru rezolvare avem:

$\lg\frac{x+1}{9}+\lg x=1 \Rightarrow \lg\frac{x^2+x}{9}=1 \Rightarrow \frac{x^2+x}{9}=10 \Rightarrow x^2+x-90=0$ care are o singură soluție acceptabilă şi anume x=9.

4. $T_{k+1}=C_{10}^k\cdot 3^{10-k}\cdot 3^{\frac{k}{3}}, k\in\{0,1,2,...,10\}$

Un termen este rațional pentru $k \,\vdots\, 3$ deci $k\in\{0,3,6,9\}$. In concluzie sunt 4 termeni raționali.

5. $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right) \Rightarrow G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

6. $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{5\cdot 2+(-4)\cdot 3}{\sqrt{5^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}}=-\frac{2}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{13}}<0$.

Rezultă că unghiul dintre cei doi vectori este obtuz.