Soluții

1.a) $A^2=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&6\\3&3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}=3A\Rightarrow a=3$

b) $A^t=\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}\Rightarrow A-A^t=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

$$\left(A-A^t\right)^2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-I_2$$

$$\left(A-A^t\right)^{2009}=\left(A-A^t\right)^{2008}\cdot\left(A-A^t\right)=\left(-I_2\right)^{2008}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

c)Fie $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ o soluție a ecuației date.

$$X\cdot X^5=X^5\cdot X\Rightarrow\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2a+b&2a+b\\2c+d&2c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+2c&2b+2d\\a+c&b+d\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}b=2c\\c+d=a\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}c+d&2c\\c&d\end{pmatrix}$$

Pe de altă parte avem $(\det X)^5=\det\left(X^5\right)=\det A=0\Rightarrow\det X=0\Rightarrow cd+d^2-2c^2=0\Rightarrow(d-c)(2c+d)=0$

Cazul 1.d=c

$$X=\begin{pmatrix}2c&2c\\c&c\end{pmatrix}=c\cdot\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}=cA$$

$$X^5=c^5\cdot A^5=c^5\cdot3^4\cdot A=A\Rightarrow c^5\cdot3^4=1\Rightarrow c^5=\frac{1}{81}\Rightarrow c=\frac{1}{\sqrt[5]{81}}$$

Obține soluția $X=\frac{1}{\sqrt[5]{81}}\cdot\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}$.

Cazul 2.d=-2c nu conduce la nici o soluție.

2.a) Fie $a,b\in M=[0,+\infty)$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow e^a\ge1\\e^b\ge1\end{array}\right|\Rightarrow e^a+e^b-1\ge1\Rightarrow\ln(e^a+e^b-1)\ge0\Rightarrow\ln(e^a+e^b-1)\in M\Rightarrow a*b\in M$$

b)Legea de compoziție * este asociativă dacă $(x*y)*z=x*(y*z),\forall x,y,z\in M$

$$\left.\begin{array}{l}x*(y*z)=x*\left(\ln(e^y+e^z-1)\right)=\ln\left(e^x+e^y+e^z-2\right)\\(x*y)*z=\left(\ln(e^x+e^y-1)\right)*z=\ln\left(e^x+e^y+e^z-2\right)\end{array}\right\}$$ deci legea este asociativă.

c) $a*a=\ln(2e^a-1)$

$a*a*a=\ln(3e^a-2)$

Demonstrăm prin inducție că $P(n):\underbrace{a*a*...*a}_{de\ \ n\ \ ori\ \ a}=\ln\left(ne^a-(n-1)\right),n\ge1$ este adevărată.

<u>Etapa verificării</u>:

Pentru n=1 avem $P(1):a=a$ este adevărată.

<u>Etapa demonstrației</u>:

Presupunem P(k) adevărată şi demonstrăm că P(k+1) este adevărată.

$P(k):\underbrace{a*a*...*a}_{de\ \ k\ \ ori\ \ a}=\ln\left(ke^a-(k-1)\right)$ este adevărată.

$P(k+1): \underbrace{a * a * \ldots * a}_{\text{de } k+1 \text{ ori } a} = \ln\left((k+1)e^a - k\right)$ trebuie demonstrată.

$\underbrace{a * a * \ldots * a}_{\text{de } k+1 \text{ ori } a} = \left(\ln\left(ke^a - (k-1)\right)\right) * a = \ln\left(ke^a - (k-1) + e^a - 1\right) = \ln\left((k+1)e^a - k\right)$ c.c.t.d.

Egalitatea $\underbrace{a * a * \ldots * a}_{\text{de } n \text{ ori } a} = 2a$ devine $\ln\left(ne^a - (n-1)\right) = 2a$

$ne^a - (n-1) = e^{2a} \Rightarrow e^{2a} - ne^a + n - 1 = 0$ .Notăm $e^a = x$ şi obținem ecuația de gradul doi $x^2 - nx + n - 1 = 0$ care are soluțiile $x_1 = 1$ şi $x_2 = n-1$.

Revenind la notație , obținem $a = 0$ sau $a = \ln(n-1)$