Soluții

1.a) A aparține dreptei date $\Rightarrow y_A = 2x_A$

B aparține dreptei date $\Rightarrow y_B = 2x_B$

C aparține dreptei date $\Rightarrow y_C = 2x_C$

$$\det M = \begin{vmatrix} x_A & 2x_A & 1 \\ x_B & 2x_B & 1 \\ x_C & 2x_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

b) Aria triunghiului ABC este $Aria = \frac{1}{2}\cdot\left|\det M\right|$

pe de altă parte avem $Aria = \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left|\det M\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\det M\right| = 1 \Rightarrow \det M = \pm 1$

c) Fie $M^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.

$$M^{-1}\cdot M = I_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1x_A + b_1x_B + c_1x_C & a_1y_A + b_1y_B + c_1y_C & a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2x_A + b_2x_B + c_2x_C & a_2y_A + b_2y_B + c_2y_C & a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3x_A + b_3x_B + c_3x_C & a_3y_A + b_3y_B + c_3y_C & a_3 + b_3 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 = 0 \\ a_2 + b_2 + c_2 = 0 \\ a_3 + b_3 + c_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2 + a_3 + b_3 + c_3 = 1.$$

2.a) Fie $X \in A, Y \in A$ $\quad X = \begin{pmatrix} m & n \\ -3n & m \end{pmatrix}$ şi $Y = \begin{pmatrix} p & q \\ -3q & p \end{pmatrix}$ $\quad m, n, p, q \in \mathbb{Z}$.

$$X + Y = \begin{pmatrix} m & n \\ -3n & m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ -3q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+p & n+q \\ -3(n+q) & m+p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ -3v & u \end{pmatrix} \in A \quad , \quad u = m+p \in \mathbb{Z}, v = n+q \in \mathbb{Z} \; .$$

b) $X\cdot Y = O_2 \Rightarrow \det X \cdot \det Y = 0 \Rightarrow (m^2 + 3n^2)(p^2 + 3q^2) = 0$

Rezultă sau $m^2 + 3n^2 = 0 \Rightarrow m = n = 0 \Rightarrow X = O_2$

sau $p^2 + 3q^2 = 0 \Rightarrow p = q = 0 \Rightarrow Y = O_2$.

c) Elementul neutru față de inmulțirea matricelor este I_2 .

Fie X o matrice inversabilă in inelul dat A.

$\Rightarrow X\cdot X' = I_2 \Rightarrow \det X \cdot \det X' = 1$ dar cum $\det X \in \mathbb{Z}, \det Y \in \mathbb{Z}$ rezultă că $\det X = \pm 1 \Rightarrow m^2 + 3n^2 = 1$

$m = \pm 1, n = 0$.

Pentru $m = 1, n = 0$ obține matricea I_2 iar pentru $m = -1, n = 0$ obține matricea $-I_2$

Amandouă matricele $I_2, -I_2$ sunt inversabile in inelul A.

Inversa matricei I_2 este I_2 .

Inversa matricei $-I_2$ este $-I_2$.