Soluții

1.a) $\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\alpha^3 = \alpha^2 \cdot \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$

b) $\alpha^{2009} \cdot x = e \Leftrightarrow \left(\alpha^3\right)^{669} \cdot \alpha^2 \cdot x = e \Leftrightarrow \alpha^2 \cdot x = e / \cdot \alpha \quad \Rightarrow x = \alpha$.

c) Mulțimea S_3 conține $3! = 6$ permutări dintre care 3 sunt pare şi 3 sunt impare.

Fie $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_6$ produsul tuturor permutărilor din S_3.

$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_6) = \underbrace{\varepsilon(\sigma_1)}_{1} \cdot \underbrace{\varepsilon(\sigma_2)}_{1} \cdot \underbrace{\varepsilon(\sigma_3)}_{1} \cdot \underbrace{\varepsilon(\sigma_4)}_{-1} \cdot \underbrace{\varepsilon(\sigma_5)}_{-1} \cdot \underbrace{\varepsilon(\sigma_6)}_{-1} = -1$ deci σ este permutare impară.

2.a) De exemplu $i\sqrt{2}$ sau $i\sqrt{3}$ sau $i\sqrt{5}$.

b) Fie $z = a + bi$ un element inversabil in inelul $\mathbb{Z}[i]$.

$\Rightarrow \exists z' \in \mathbb{Z}[i], z \cdot z' = 1 \Rightarrow |z| \cdot |z'| = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = 1 \Rightarrow (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 1$

Dar cum $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ rezultă că $a^2 + b^2 = 1$.

Pentru a=1 , b=0 $\Rightarrow z = 1$

Pentru $a = -1$, b=0 $\Rightarrow z = -1$

Pentru a=0 , b=1 $\Rightarrow z = i$

Pentru a=0 , $b = -1$ $\Rightarrow z = -i$

Elementele $\pm 1, \pm i$ sunt singurele elemente inversabile in inelul $\mathbb{Z}[i]$.

c) Să observăm că $z = a + bi \in H$ cu $a, b \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow 2 / (a + b)$.

Fie $z_1 = a + bi \in H \quad \Rightarrow 2 / (a + b)$

$z_2 = c + di \in H \quad \Rightarrow 2 / (c + d)$

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac - bd + i(ad + bc)$

$ac - bd + ad + bc = c\underbrace{(a + b)}_{\vdots 2} + d\underbrace{(a - b)}_{\vdots 2} \vdots 2 \quad \Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in H$.(am folosit aici proprietatea că dacă suma a două numere intregi este număr par , atunci şi diferența lor este număr par)