

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) $A^2 = 5A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+2x & 10 \\ 5x & 2x+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 5x & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2.$

b) Pentru $x = 2$, conform punctului anterior, rezultă $A^2 = 5A$. Prin inducție, rezultă $A^n = 5^{n-1}A$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, de unde $A^{2009} = 5^{2008}A$.

c) $A + A^t = \begin{pmatrix} 2 & x+2 \\ x+2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A + A^t) = 1$ dacă și numai dacă $\det(A + A^t) = 0$, adică $x \in \{-6, 2\}$.

2.a) $f(-1) = a^2 - 2a + 7 = 10 \Rightarrow a \in \{-1, 3\}$.

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j$. Cum $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 - a$ și $\sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j = \frac{a^2 + 3}{2}$,

rezultă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -2a - 2$

c) Avem $\sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j)^2 = 3 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j = -a^2 - 6a - 9$. Dacă f are toate rădăcinile reale

$\Rightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j)^2 \geq 0 \Rightarrow -a^2 - 6a - 9 \geq 0 \Rightarrow a = -3$.

Egalitatea are loc dacă $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{1 - a}{4} = 1$. Obținem $a = -3, b = -8, c = 2$.