Soluție

1.a) $I_2+A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 7 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow (I_2+A)^2=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 7 & -3\end{pmatrix}=I_2+A.$

b) $A^2=-A$, $A^3=A^2\cdot A=-A\cdot A=-A^2=A$. Prin inducție matematică rezultă că $A^n=(-1)^{n-1}A, \forall n\in\mathbb{N}^*$, deci $\left\{A^n \middle| n\in\mathbb{N}^*\right\}=\{-A,A\}$.

c) $X^3=A\Rightarrow \det\left(X^3\right)=\det(A)\Rightarrow\det(X)=0.$ Dacă $t=tr(X)\Rightarrow X^3=t^2X$. Din $t^2X=A\Rightarrow t^3=-1$, deci $t=-1$. Deci $X=A$.

2.a) $f(1)+f(-1)=a_n\left(1+(-1)^n\right)+a_{n-1}\left(1+(-1)^{n-1}\right)+...+a_1\left(1+(-1)\right)+2a_0$.

Avem $1+(-1)^k\in\{0,2\}$, pentru orice $k\in\{1,2,...,n\}$, deci $f(1)+f(-1)$ este număr par

b) Presupunem că ecuația $f(x)=0$ are o rădăcină întreagă k; atunci $f(x)=(x-k)g(x)$, unde g este un polinom cu coeficienți întregi. $f(2)=(2-k)g(2)$ este impar, deci $2-k$ este impar.
$f(3)=(3-k)g(3)$ este impar, deci $3-k$ este impar. Atunci $2-k+3-k=5-2k$ este par, contradicție.

c) Dacă polinomul $g=X^3-X+3a+1$ ar putea fi descompus în produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi, unul dintre aceste polinoame ar fi de gradul 1, deci g ar avea o rădăcină rațională $x_0=\frac{p}{q}$, unde $p,q\in\mathbb{Z},\ q\geq 1, (p,q)=1$, astfel încât $p\,|\,1$ și $q\,|\,1$. Rezultă $x_0\in\{-1,1\}$.

Pentru $x_0=-1\Rightarrow g(-1)=3a+1=0$ dacă și numai dacă $a=-\frac{1}{3}$, care nu este număr întreg, contradicție.

Pentru $x_0=1\Rightarrow g(1)=3a+1=0$ dacă și numai dacă $a=-\frac{1}{3}$, care nu este număr întreg, contradicție.