Soluții

1.a) Asimptota oblică are ecuația $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x - ax}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x} - a\right) = \frac{0}{\infty} - a = 0 - a = -a$$

$$n = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[e^x - ax + ax\right] = \lim_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$$

Asimptota oblică spre $-\infty$ are ecuația $y = -ax$.

b) $f'(x) = e^x - a = 0 \Rightarrow e^x = a \Rightarrow x = \ln a$

Tabelul de variație al funcției este:

x	$-\infty$					$\ln a$					$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$					$a - a\ln a$					$\nearrow$

Din tabel rezultă că $x = \ln a$ este punct de minim.

c) $f(0) = 1$

Condiția din ipoteză $f(x) \ge 1, \forall x \in \mathbb{R}$ devine $f(x) \ge f(0), \forall x \in \mathbb{R}$ adică x=0 este punct de minim.

Conform teoremei lui Fermat avem $f'(0) = 0$.

$f'(x) = e^x - a \Rightarrow f'(0) = 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$.

Pentru a=1 funcția devine $f(x) = e^x - x$ şi din tabelul de variație de mai sus deducem că $f(x) \ge 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

2.a) Funcția F este derivabilă pe $(0,+\infty)$ şi avem

$$F'(x) = \left[2\sqrt{x}\left(\ln x - 2\right)\right]' = \left(2\sqrt{x}\right)'\left(\ln x - 2\right) + 2\sqrt{x}\left(\ln x - 2\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\ln x - 2\right) + 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} =$$

$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\ln x - 2 + 2\right) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = f(x)$ deci F este o primitivă a funcției f.

b) Fie G o primitivă a funcției f.

$G'(x) = f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} > 0, \forall x > 1$ deci G este crescătoare pe $[1,+\infty)$.

c) $Aria = \int_{\frac{1}{e}}^{e}\left|f(x)\right|dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1}(-f(x))dx + \int_{1}^{e} f(x)dx = -F(x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + F(x)\Big|_{1}^{e} = -\left[2\sqrt{x}\left(\ln x - 2\right)\right]\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[2\sqrt{x}\left(\ln x - 2\right)\right]\Big|_{1}^{e} =$

$= 4 - \frac{6}{\sqrt{e}} - 2\sqrt{e} + 4 = 8 - \frac{6}{\sqrt{e}} - 2\sqrt{e}$.