Soluții

1.a) Demonstram prin inducție matematică propoziția $P(n): a_n \in (0,1), n \geq 1$.

Etapa verificării:

$P(1): a_1 \in (0,1)$ este adevarată.

Etapa demonstrației:

Presupunem P(k) adevărată şi demonstrăm că P(k+1) este adevărată.

$P(k): a_k \in (0,1)$ este adevărată.

$P(k+1): a_{k+1} \in (0,1)$ trebuie demonstrată.

$a_{k+1} = a_k\left(1-\sqrt{a_k}\right) \in (0,1)$ c.c.t.d.

a) $a_{n+1} - a_n = -a_n\sqrt{a_n} < 0, \forall n \geq 1$ deci şirul este strict descrescător.

c) $a_k^2 < a_k\sqrt{a_k}, \forall k \geq 1$ deoarece $a_k \in (0,1)$

$\Rightarrow b_n = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 < a_1\sqrt{a_1} + a_2\sqrt{a_2} + ... + a_n\sqrt{a_n} = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + ... + a_n - a_{n+1} = a_1 - a_{n+1} < a_1, \forall n \geq 1$

Deci şirul dat este mărginit superior de a_1.

2.a)

$$F'(x) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)' = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{4x^2+4x+1}{3}} = 4 \cdot \frac{1}{4x^2+4x+4} = \frac{1}{x^2+x+1} = f(x)$$

deci F este o primitivă a funcției f.

b) $Aria = \int_0^1 (2x+1) f(x)dx = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \int_0^1 \frac{\left(x^2+x+1\right)'}{x^2+x+1}dx = \ln(x^2+x+1)\Big|_0^1 = \ln 3$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(F(n) - F(-n)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} arctg\left(\frac{2n+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3} arctg\left(\frac{-2n+1}{\sqrt{3}}\right)\right) =$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$.