Soluții

1.a) $f'(x) = arctgx + \dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{2x}{1+x^2} = arctgx - \dfrac{x}{1+x^2}$

$f''(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1+x^2-1+x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$ deci funcția este convexă pe **R**.

b) $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'$ este crescătoare pe **R**.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(arctgx - \dfrac{x}{1+x^2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(arctgx - \dfrac{x}{1+x^2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ rezultă că funcția f' este mărginită.

c) Tabelul de variație al funcției f' este:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$	+ + + + +		0	+ + + + + +	
$f'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Din tabel rezultă că $f'(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, 0)$

$f'(x) > 0$ pentru $x \in (0, +\infty)$.

Tabelul de variație al funcției f este:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	− − − − − − − − − −		0	+ + + + + +	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Din tabel rezultă că x=0 este punct de minim global pentru funcția f

$f(x) \geq f(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ c.c.t.d.

2.a) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\left(1+x^2\right)'}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$.

b) $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{n+1}$

Am folosit inegalitatea $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \leq x^n, \forall x \in [0,1]$.

c) $I_n \geq 0$ deoarece funcția de integrat este pozitivă.

$0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ Folosind criteriul cleştelui $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

0