Soluție

1.a) $f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$.

b) Deoarece $f'(x)>0,\forall x\in(0,\infty)$ rezultă că *f* este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

Din $x>0$ și *f* este strict crescătoare pe $(0,\infty)$, rezultă $f(x)>f(0)=0$.

c) $f(x)=\ln e^x-\ln(1+x)=\ln\dfrac{e^x}{1+x}$. Deci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

2.a) $F(x)=\displaystyle\int_1^2 t^x dt=\left.\dfrac{t^{x+1}}{x+1}\right|_1^2=\dfrac{2^{x+1}-1}{x+1}$, pentru $x\neq -1$, deci $1+(x+1)F(x)=2^{x+1},\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; pentru $x=-1$ relația se verifică direct.

b) $\lim\limits_{x\to-1} F(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2^{x+1}-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1} 2^{x+1}\ln 2=\ln 2$.

c) Din teorema de existență a primitivelor unei funcții continue, rezultă că *F* este primitiva funcției *f* pentru care $F(0)=1$ (condiție care este îndeplinită). Deci $F'(x)=f(x),\forall x\in(-1,\infty)$.

Rezultă $f(x)=\left(\dfrac{2^{x+1}-1}{x+1}\right)'=\dfrac{(x\ln 2+\ln 2-1)2^{x+1}+1}{(x+1)^2}$.