

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.

b) Deoarece $f'(x) > 0, \forall x \in (0, \infty)$ rezultă că f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

Din $x > 0$ și f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$, rezultă $f(x) > f(0) = 0$.

c) $f(x) = \ln e^x - \ln(1+x) = \ln \frac{e^x}{1+x}$. Deci $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

2.a) $F(x) = \int_1^2 t^x dt = \frac{t^{x+1}}{x+1} \Big|_1^2 = \frac{2^{x+1} - 1}{x+1}$, pentru $x \neq -1$, deci $1 + (x+1)F(x) = 2^{x+1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; pentru $x = -1$

relația se verifică direct.

b) $\lim_{x \rightarrow -1} F(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2^{x+1} - 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} 2^{x+1} \ln 2 = \ln 2$.

c) Din teorema de existență a primitivelor unei funcții continue, rezultă că F este primitiva funcției f pentru care $F(0) = 1$ (condiție care este îndeplinită). Deci $F'(x) = f(x), \forall x \in (-1, \infty)$.

Rezultă $f(x) = \left(\frac{2^{x+1} - 1}{x+1} \right)' = \frac{(x \ln 2 + \ln 2 - 1)2^{x+1} + 1}{(x+1)^2}$.