

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, deci f nu admite asimptotă spre $+\infty$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (n+1)x^n - (n+2) = 0$, deci avem punctul de extrem unic $x_n = \sqrt[n]{\frac{n+2}{n+1}}$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e$.

2.a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{1 + x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x \Big|_0^1 - \arctg(x) \Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$.

b) $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2} + x^{2n}}{1+x^2} dx = \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1}$.

c) $\frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq x^{2n}, \forall x \in [0,1] \Rightarrow 0 < I_n \leq \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.