Soluție

1a) $f'(x)=e^x+3x^2-2x+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$, de unde rezultă că funcția este strict crescătoare

b) Din punctul anterior rezultă ca functia este injectivă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, funcția este continuă, deci surjectivă, adică inversabilă.

c) Cu substituția $x=f(y)$ obținem $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{\ln x}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{y}{\ln(e^y+y^3-y^2+y)}=1$.

2a) $I_1=\int_0^1 \dfrac{x}{x^2+3x+2}dx=\int_0^1\left(\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=2\ln 3-3\ln 2$.

b) $I_{n+2}+3I_{n+1}+2I_n=\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}$.

c) $nI_n=\int_0^1 nx^n\left(\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\int_0^1\dfrac{2x(x^n)'}{x+2}dx-\int_0^1\dfrac{x(x^n)'}{x+1}dx=\dfrac{1}{6}-4\int_0^1\dfrac{x^n}{(x+2)^2}dx+\int_0^1\dfrac{x^n}{(x+1)^2}dx$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n=\dfrac{1}{6}$