Soluții

1. a) $A^2 = A \Rightarrow A + A^2 = 2A$.

b) $\det(X + A) = \begin{vmatrix} x+4 & -6 \\ 2 & x-3 \end{vmatrix} = x^2 + x$. Se obține $x_1 = -2,\ x_2 = 1$.

Atunci $X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ sau $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Partea stângă se mai scrie $A + 2A + 3A + \ldots + nA = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)A = \frac{n(n+1)}{2}A,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. a) Avem $f(2) = 0$. Obținem $m = -\frac{13}{2}$.

b) x_i, cu $i \in \{1,2,3\}$ sunt rădăcini ale polinomului f. Înlocuim și obținem $x_i^3 + x_i^2 + mx_i + 3 = 0$.

Adunăm cele trei relații și obținem $S_3 + S_2 + mS_1 + 3 = 0$.

c) Rădăcinile raționale se găsesc printre divizorii termenului liber. Deci 1 și –1 sunt posibilele rădăcini raționale. Înlocuim în polinomul f și obținem m = 1 sau m = –3, deci pentru m număr par f nu are rădăcini raționale.