Soluție

1.a. Ecuația dreptei este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_{c_4} & y_{c_4} & 1 \\ x_{c_2} & y_{c_2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y = 0.$

b. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ n & -n & 1 \\ n+1 & -n-1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} n & -n \\ n+1 & -n-1 \end{vmatrix} = n(-n-1) - (-n)(n+1) = 0 \Rightarrow$ punctele O, C_n, C_{n+1} sunt coliniare oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}^*$.

c. Aria triunghiului este $A = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 3 - 3 - 6 - 6 - 1 = 3$, de unde

aria triunghiului este $A = \frac{1}{2}|\Delta| = \frac{3}{2}$.

2.a. Pentru $x = 0$ avem $A_0 = \begin{pmatrix} 2009^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \in G$.

b. $A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 2009^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2009^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2009^x \cdot 2009^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2009^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix} = A_{x+y}$.

c. Inmulțirea maticelor este asociativă. $I_3 = A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ este element neutru, iar

$A_{-x} = \begin{pmatrix} 2008^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \end{pmatrix} \in G$ este matricea inversă a matricei A_x.