Soluție

1.a. $\det A = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 1$.

b. $A^2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & 2x \\ 2x & x^2+1 \end{pmatrix}$. Egalitatea $A_x^2 = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x^2+1 & 2x \\ 2x & x^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0$.

c. Din $A_x^2 = \begin{pmatrix} x^2+1 & 2x \\ 2x & x^2+1 \end{pmatrix}$ și $2x \cdot A_x = \begin{pmatrix} 2x^2 & 2x \\ 2x & 2x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_x^2 = 2xA_2 + (1-x^2)I_2$.

2. a) După rezolvarea sistemului obținem $a = \hat{0}$ sau $\mathrm{b} = \hat{2}$.

b. Avem $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1} = (X+\hat{1})(X^2 + X + \hat{1})$ de unde rezultă câtul $X^2 + X + \hat{1}$ și restul $\hat{0}$.

c. $f\left(\hat{1}\right) = a^3 + \hat{2}a + \hat{2}a + \hat{1} = a^3 + a + \hat{1}$, dar $a^3 = a$, $\forall a \in \mathbb{Z}_3 \Rightarrow f\left(\hat{1}\right) = \hat{2}a + \hat{1}$.