Soluții

1.a) $f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)'=\dfrac{(x^2)'\cdot(x+1)-(x^2)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{2x\cdot(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

b) $f'(x)=0\Rightarrow\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}=0\Rightarrow x_1=0, x_2=-2$

Tabelul de variație al funcției este:

x		-2		-1		0	
f'(x)	+ + + +	0	- - - - -	|	- - - - - - -	0	+ + + +
f(x)	↗	f(-2)	↘	|	↘		↗

Pe intervalele $(-\infty,-2]$ şi $[0,+\infty)$ funcția este crescătoare;
Pe intervalele $[-2,-1)$ şi $(-1,0]$ funcția este descrescătoare;

c) $f(-2)=\dfrac{4}{-1}=-4$

Din tabelul de variație al funcției rezultă că $f(x)\le -4$ pentru $\forall x<-1$.

2.a) Studiem continuitatea funcției f in punctul x=0.

$l_s=\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}(x^2+e^x)=1$

$l_d=\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}(\sqrt{x}+1)=1$ deci funcția este continuă in x=0 şi deci este continuă pe **R**.

$f(0)=1$

Rezultă că funcția are primitive pe **R**.

b) $\int_{-1}^{0}xf(x)dx=\int_{-1}^{0}x(x^2+e^x)dx=\int_{-1}^{0}(x^3+xe^x)dx=\int_{-1}^{0}x^3dx+\int_{-1}^{0}xe^xdx=\left.\dfrac{x^4}{4}\right|_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}xe^xdx=-\dfrac{1}{4}+\int_{-1}^{0}x(e^x)'dx=$

$=-\dfrac{1}{4}+\left.xe^x\right|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^xdx=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{e}-\left.e^x\right|_{-1}^{0}=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{e}-1+\dfrac{1}{e}=\dfrac{2}{e}-\dfrac{5}{4}=\dfrac{8-5e}{4e}$.

c) $V(C_g)=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}+1\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(x+2\sqrt{x}+1\right)dx=\pi\left.\left(\dfrac{x^2}{2}+2\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+x\right)\right|_0^1=\pi\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{3}+1\right)=\dfrac{17\pi}{6}$.