Soluție

1.a) $f'(x)=(\ln x-x+1)'=\frac{1}{x}-1, \forall x>0$.

b) $f'(x)=\frac{1}{x}-1=0\Rightarrow x=1\in(0,+\infty)$. Din tabelul de variație al funcției obținem că f este crescătoare pentru $x\in(0;1]$ și descrescătoare pe $[1;\infty)$. Așadar $x=1$ este punctul de maxim al funcției f.

c) Din tabelul de variație şi din $f(e)=2-e\Rightarrow 2-e\le f(2)\le 0$.

2.a) $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 (x-1)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}$.

b) Cum $x\in[-a,a]$ şi $a\in(0,1)$ rezultă că $x<1\Rightarrow f(x)=-x+1$. Deci $\int_{-a}^{a} f(x)dx=1\Rightarrow\int_{-a}^{a}(-x+1)dx=1$

$\Leftrightarrow\left(-\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-a}^{a}=1\Leftrightarrow\left(-\frac{a^2}{2}+a\right)-\left(-\frac{(-a)^2}{2}+(-a)\right)=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}\in(0,1)$.

c) $\forall x\in[0,1]$ avem $e^x\ge 1$. Deci $f\left(e^x\right)=e^x-1\Rightarrow\int_0^1 x\cdot f\left(e^x\right)dx=\int_0^1 x\cdot\left(e^x-1\right)dx=\int_0^1 x\cdot e^x\,dx-\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$.