

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1.a) $f'(x) = (\ln x - x + 1)' = \frac{1}{x} - 1, \forall x > 0.$

b) $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in (0, +\infty).$ Din tabelul de variație al funcției obținem că f este crescătoare pentru $x \in (0; 1]$ și descrescătoare pe $[1; \infty).$ Așadar $x = 1$ este punctul de maxim al funcției $f.$

c) Din tabelul de variație și din $f(e) = 2 - e \Rightarrow 2 - e \leq f(2) \leq 0.$

2.a) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x-1) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$

b) Cum $x \in [-a, a]$ și $a \in (0, 1)$ rezultă că $x < 1 \Rightarrow f(x) = -x + 1.$ Deci $\int_{-a}^a f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{-a}^a (-x + 1) dx = 1$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-a}^a = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{a^2}{2} + a \right) - \left(-\frac{(-a)^2}{2} + (-a) \right) = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \in (0, 1).$$

c) $\forall x \in [0, 1]$ avem $e^x \geq 1.$ Deci $f(e^x) = e^x - 1 \Rightarrow \int_0^1 x \cdot f(e^x) dx = \int_0^1 x \cdot (e^x - 1) dx = \int_0^1 x \cdot e^x dx - \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$