Soluții

1.a) $f'(x)=\left(x^3+\frac{3}{x}\right)'=3x^2-\frac{3}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3-3=0$

c) $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-\frac{3}{x^2}=0 \Rightarrow x^4=1 \Rightarrow x=\pm 1$

Tabelul de variație al funcției este:

x		-1		0		1	
f'(x)	+ + + +	0	- - - - -	|	- - - - - -	0	+ + + + +
f(x)	↗	-4	↘	|	↘	4	↗

Funcția este crescătoare pe intervalele $(-\infty,-1)$ şi $(1,+\infty)$
şi este descrescătoare pe intervalele (-1,0) şi (0,1).

2.a) $V(C_f)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1 x^2(2-x^2)dx=\pi\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{7\pi}{15}$

b) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(-2x\cdot(2-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(t)dt\right)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(F(x)-F(0)\right)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{2-x^2}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-x^2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

unde cu F s-a notat o primitivă a funcției f.