Soluții

1. a) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, pentru orice $x>0$

b) Ecuația tangentei este $y-f(e)=f'(e)(x-e)$, adică $y=\dfrac{1}{e}$.

c) Din studiul semnului derivatei lui f se obține că f este crescătoare pe $(0,e]$ şi descrescătoare pe $[e,+\infty)$, deci $f(x)\le f(e)=\dfrac{1}{e}$, pentru orice $x>0$, de unde concluzia.

2. a) $\int f(x)dx=x-\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}+\mathcal{C}$.

b) $V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\left(x-\dfrac{4x\sqrt{x}}{3}+\dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{\pi}{6}$.

c) $\int_0^1 f^{2009}(x)dx\le\int_0^1(1-x)^{2009}dx=\dfrac{-(x-1)^{2010}}{2010}\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{2010}$.