Rezolvare

a. $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & b \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, de unde $\det A = 2a+2b-4-3ab$.

b. Pentru $b=3$ matricea devine $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, de unde $\det A = 2a+6-4-9a=-7a+2$. Se va obține ecuația cu necunoscuta a: $-7a+2=-12 \Leftrightarrow a=2$.

c. Pentru $a=1$ matricea devine $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & b \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, de unde $\det A = 2+2b-4-3b=-b-2$. Matricea este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$, de unde $-b-2\neq 0 \Leftrightarrow b\neq -2$. În concluzie matricea A este inversabilă pentru $b\in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

d. Pentru $a=1$ şi $b=0$ matricea devine $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A=-2$. Calculăm matricea adjunctă

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ atunci } A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^* = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

e. Ecuația de gradul al doilea $x^2-2x-3=0$ ale cărei soluții sunt x_1 şi x_2 verifică relațiile lui Viete între coeficienții ecuației şi soluțiile acesteia, de unde vom obține $x_1+x_2=2$ şi $x_1x_2=-3$. Dacă $a=x_1$ şi $b=x_2$, matricea devine $A=\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ cu $\det A = 2x_1+2x_2-4-3x_1x_2 = 2(x_1+x_2)-4-3x_1x_2$. Prin înlocuire se va obține $\det A=9$.

f. $\begin{cases} x+y+2z=8 \\ y=3 \\ 2x+3y+2z=15 \end{cases}$, înlocuind $y=3$ în primele două ecuații ale sistemului se va obține $\begin{cases} x+2z=5 \\ y=3 \\ 2x+2z=6 \end{cases}$,

de unde se va obține printr-un simplu calcul $\begin{cases} z=2 \\ y=3 \\ x=1 \end{cases}$. Mulțimea soluțiilor sistemului va fi $\{(1;3;2)\}$.