

PROBĂ SCRISĂ LA MATEMATICĂ
Sesiunea iunie-iulie 2005

PROBA D. M1: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, specializarea matematică-informatică
NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru efectiv 3 ore. **Varianta 1**

SUBIECTUL I (30p)

➤ Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen

- (3p) 1. Dacă funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este $f(x) = x - 3$, cât este produsul $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(7)$?
- (3p) 2. Câte submulțimi nevide ale mulțimii \mathbf{Z}_3 au suma elementelor egală cu $\hat{0}$?
- (3p) 3. Dacă funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este $f(x) = -x^4 + 2x$, cât este $(f \circ f)(1)$?
- (3p) 4. Care este probabilitatea ca un element n din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ să verifice relația $2^n + 5^n = 3^n + 4^n$?
- (3p) 5. Câte soluții reale are ecuația $x^4 = 16$?

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^x + x + \frac{1}{2}$.

- (3p) 6. Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$?
- (3p) 7. Cât este $\int_0^1 f(x) dx$?
- (3p) 8. Cum este funcția f pe mulțimea numerelor reale : convexă sau concavă ?
- (3p) 9. Cât este $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?
- (3p) 10. Cât este $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$?

SUBIECTUL II (20p)

- (4p) 11. Care este distanța dintre punctele $A(1, 3, 5)$ și $B(3, 5, 7)$?
- (4p) 12. Care este lungimea razei cercului $x^2 + y^2 = 4$?
- (4p) 13. Cât este $\cos^2 \pi + \sin^2 \pi$?
- (4p) 14. Care este modulul numărului complex $\frac{5 + 8i}{8 - 5i}$?
- (2p) 15. Cât este aria unui triunghi cu lungimile laturilor de 3, 3 și 4 ?
- (2p) 16. Care este ecuația tangentei la parabola $y^2 = 2x$ dusă prin punctul $P(2, 2)$?

Pentru subiectele III și IV se cer rezolvările complete

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Spunem că matricea $M \in M_2(\mathbf{R})$ este *nilpotentă*, dacă există $n \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $M^n = O_2$.

- (6p) a) Să se verifice că matricele O_2 și J sunt *nilpotente*.
- (4p) b) Să se arate că matricea K nu este nici *inversabilă* nici *nilpotentă*.
- (4p) c) Să se arate că, dacă matricea $X \in M_2(\mathbf{R})$, este $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, atunci avem identitatea $X^2 - (p+s)X + (ps-rq)I_2 = O_2$.
- (2p) d) Să se arate că, dacă matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ verifică relația $A^2 = O_2$, atunci $a+d=0$ și $ad-bc=0$.
- (2p) e) Să se arate că, dacă matricea $B \in M_2(\mathbf{R})$ este *nilpotentă*, atunci $B^2 = O_2$.
- (2p) f) Să se arate că matricea I_2 nu poate fi scrisă ca o sumă finită de matrice *nilpotente*.

SUBIECTUL IV (20p)

- (4p) a) Să se verifice că $\frac{1}{1-a} = 1 + a + \dots + a^n + \frac{a^{n+1}}{1-a}$, $\forall n \in \mathbf{N}$ și $\forall a \in \mathbf{R} - \{1\}$.
- (4p) b) Să se deducă relația $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 - \dots + (-1)^n (\sqrt{x})^n + (-1)^{n+1} \frac{(\sqrt{x})^{n+1}}{1+\sqrt{x}}$, $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbf{N}$.
- (4p) c) Să se arate că $0 \leq \frac{(\sqrt{x})^{n+1}}{1+\sqrt{x}} \leq (\sqrt{x})^{n+1}$, $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) d) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{(\sqrt{x})^{n+1}}{1+\sqrt{x}} dx = 0$, $\forall b \in [0,1]$
- (4p) e) Să se calculeze integrala $\int_0^b \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$, unde $b > 0$.
- (2p) f) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{(-1)^1 x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{(-1)^2 x^{\frac{2}{2}+1}}{\frac{2}{2}+1} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1} \right) = \int_0^x \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt$, $\forall x \in [0,1]$.