

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Testul 11**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$b_3^2 = b_2 b_4 \Rightarrow 3^2 = 6b_4$ $b_4 = \frac{3}{2}$	3p 2p
2.	$(-a)^2 + 3(-a) - 4 + a^2 + 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4$ $a = -2$ sau $a = 2$	3p 2p
3.	$2^{x+1} = 2^4 \cdot 2^{-2x} \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^{4-2x} \Leftrightarrow x+1 = 4-2x$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele naturale de două cifre care au cifra unităților egală cu dublul cifrei zecilor sunt 12, 24, 36 și 48, deci sunt 4 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$	2p 2p 1p
5.	$M(3,1)$ este mijlocul segmentului $AB$ $M \in OC \Leftrightarrow C \in OM$ și, cum dreapta $OM$ are ecuația $x - 3y = 0$ , obținem $a - 3(a+3) = 0$ , deci $a = -\frac{9}{2}$	2p 3p
6.	$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ , $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ , pentru orice număr real $x$ $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 x - (-\sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ , pentru orice număr real $x$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$B(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(1,2)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1 - 2 = -1$	2p 3p
b)	$A \cdot B(a,b) = \begin{pmatrix} 1+b & a+1 \\ 2+2b & 2a+2 \end{pmatrix}$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$ $\det(A \cdot B(a,b)) = 2(a+1)(b+1) - 2(a+1)(b+1) = 0$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$	3p 2p
c)	$B(a,b) \cdot A = \begin{pmatrix} 1+2a & 1+2a \\ b+2 & b+2 \end{pmatrix}$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$ $\begin{pmatrix} 1+b & a+1 \\ 2+2b & 2a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 1+2a \\ b+2 & b+2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 0$ și $b = 0$	2p 3p

<b>2.a)</b>	$3 \circ 5 =  3 - 5  + 1 =  -2  + 1 =$ $= 2 + 1 = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$a = (2 \circ 3) \circ 4 = 2 \circ 4 = 3$ $b = 2 \circ (3 \circ 4) = 2 \circ 2 = 1$ , deci $a - b = 2$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	Pentru $n = 1$ și $m$ număr natural nenul, $m \circ n = m \circ 1 =  m - 1  + 1 = m - 1 + 1 =$ $= m$ , deci există o infinitate de perechi de numere naturale nenule $(m, n)$ pentru care $m \circ n = m$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = (\ln(x-1) - \ln(x+1))' = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} =$ $= \frac{x+1 - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2 - 1}$ , $x \in (1, +\infty)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} =$ $= \ln \frac{1-0}{1+0} = \ln 1 = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$x \in (1, +\infty) \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ , deci funcția $f$ este crescătoare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in (1, +\infty)$ , deci funcția $f$ nu este surjectivă	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 2f(x) dx = \int_0^1 (2x+2) dx = (x^2 + 2x) \Big _0^1 =$ $= 1 + 2 = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 e^x (x+1) dx = \int_0^1 (e^x)' (x+1) dx = (x+1)e^x \Big _0^1 - \int_0^1 e^x dx =$ $= 2e - 1 - e^x \Big _0^1 = 2e - 1 - (e - 1) = e$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$f(e^x) - e^{f(x)} = e^x + 1 - e^{x+1} = 1 - e^x(e-1)$ , pentru orice $x \in [0, e]$ $e - 1 > 1$ și $e^x \geq 1$ , pentru orice $x \in [0, e] \Rightarrow 1 - e^x(e-1) \leq 0$ , pentru orice $x \in [0, e]$ , de unde obținem că $\int_0^e f(e^x) dx \leq \int_0^e e^{f(x)} dx$	<b>2p</b> <b>3p</b>