**Examenul naţional de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Testul 12**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $a=2\sqrt{2}$ | **2p** |
| | Cum $\sqrt{4}<\sqrt{8}<\sqrt{9}$, deci $2<a<3$, obținem că $[a]=2$ | **3p** |
| **2.** | Axa $Ox$ este tangentă la graficul funcției $f \Rightarrow \Delta=0$ | **2p** |
| | $m^2-4=0$, deci $m=-2$ sau $m=2$ | **3p** |
| **3.** | $(x-1)(x+2)=(x-1)(x+2)^2 \Rightarrow (x-1)(x+2)(x+1)=0$ | **2p** |
| | $x=-2$, care nu convine; $x=-1$, care nu convine; $x=1$, care convine | **3p** |
| **4.** | $C_n^2=55 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}=55 \Rightarrow n^2-n-110=0$ | **3p** |
| | Cum $n$ este număr natural, $n\geq 2$, obținem $n=11$ | **2p** |
| **5.** | Punctul de intersecție a dreptelor $d_1$ și $d_2$ este punctul $M(-1,-1)$ | **2p** |
| | $m_{d_2}=-1$ și, cum $m_d\cdot m_{d_2}=-1$, obținem $m_d=1$, deci ecuația dreptei $d$ este $y=x$ | **3p** |
| **6.** | $\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{2}=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}=$ | **3p** |
| | $=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(4,2)=\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&4&3\\3&-2&2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(4,2))=\begin{vmatrix}2&-2&1\\1&4&3\\3&-2&2\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=16+(-2)+(-18)-12-(-12)-(-4)=0$ | **3p** |
| **b)** | $A(2,1)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&3\\3&-2&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2,1))=0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A(2,1))\leq 2$ | **3p** |
| | Cum $\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=5\neq 0$, obținem că rangul matricei $A(2,1)$ este egal cu 2 | **2p** |
| **c)** | $n^2-3n+1=p^2-3p+1 \Leftrightarrow (n-p)(n+p-3)=0$ | **2p** |
| | Cum $n$ și $p$ sunt numere naturale nenule și distincte, obținem $n+p=3$, iar perechile sunt $(1,2)$ și $(2,1)$ | **3p** |
| **2.a)** | $(-1)*3=\frac{-3}{3}-(-1)-3+6=$ | **3p** |
| | $=-1+1-3+6=3$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **b)** | $x*(y+z-3)=\frac{x(y+z-3)}{3}-x-(y+z-3)+6=\frac{xy+xz}{3}-2x-y-z+9=$ | **2p** |
| | $=\frac{xy}{3}-x-y+6+\frac{xz}{3}-x-z+6-3=(x*y)+(x*z)-3$, pentru orice numere reale $x$, $y$ și $z$ | **3p** |
| **c)** | $x*6=6*x=x$, pentru orice număr real $x$, deci $e=6$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”, de unde obținem că $x*x'=x'*x=6$, unde $x'$ este simetricul lui $x$ în raport cu legea de compoziție „$*$” | **2p** |
| | Deoarece $2x-3=x+x-3$ și $x*(y+z-3)=(x*y)+(x*z)-3$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$, obținem $(x*x)+(x*x')-3+(x'*x)+(x'*x)-3=42\Leftrightarrow(x*x)+6-3+6+6-3=42$, deci $x*x=30\Rightarrow\frac{x^2}{3}-2x+6=30$, de unde obținem $x=-6$ sau $x=12$, care convin | **3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f(x)=\sqrt{x^2+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\cdot\left(x^2+2\right)'=$ | **3p** |
| | $=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| **b)** | Tangenta la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=\sqrt{2}$, situat pe graficul funcției $f$, este paralelă cu axa $Ox\Leftrightarrow f'\left(\sqrt{2}\right)=0$ | **2p** |
| | Cum $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}-a$, pentru orice număr real $a$, obținem că $\frac{\sqrt{2}}{2}-a=0$, deci $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ | **3p** |
| **c)** | $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}-ax}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-a\right)}{x}=1-a$, pentru orice număr real $a$ | **3p** |
| | $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(1-a)x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}=0$, deci, pentru orice număr real $a$, dreapta de ecuație $y=(1-a)x$ este asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcției $f$ | **2p** |
| **2.a)** | $\int_1^3\frac{xf(x)}{\operatorname{arctg}x}dx=\int_1^3x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right\|_1^3=$ | **3p** |
| | $=\frac{81-1}{4}=20$ | **2p** |
| **b)** | $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\left(x^2+1\right)'\operatorname{arctg}x\,dx=\left.\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x\right\|_1^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^2+1}{x^2+1}dx=2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}1dx=$ | **3p** |
| | $=\frac{5\pi}{12}-\left.\frac{1}{2}x\right\|_1^{\sqrt{3}}=\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ | **2p** |
| **c)** | Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și orice $x\in[0,1]$, $0\le x^{2n}\le1$ și $0\le\operatorname{arctg}x\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow0\le\operatorname{arctg}^nx\le\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$, de unde obținem că $0\le\int_0^1f^n(x)dx\le\int_0^1\left(\frac{\pi}{4}\right)^ndx=\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$ | **3p** |
| | Cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n=0$, obținem că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1f^n(x)dx=0$ | **2p** |