Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow r = 3$ $a_{2021} = a_1 + 2020r = 6062$	**2p** **3p**
2.	$f(x) = y \Leftrightarrow 2x - 3 = -x + 3$ Coordonatele punctului de intersecție sunt $x = 2$ și $y = 1$	**3p** **2p**
3.	$3^{\frac{x+2}{2}} = 3^3 \Leftrightarrow \frac{x+2}{2} = 3$ $x = 4$	**3p** **2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile Numerele din mulțimea A care sunt divizori ai numărului 48 sunt: 1, 2, 3, 4, 6 și 8, deci sunt 6 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	**2p** **2p** **1p**
5.	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(m-4) + 2m = 4m - 8$, unde m este număr real $4m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 2$	**3p** **2p**
6.	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 36 + 9 + 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 63$, deci $BC = 3\sqrt{7}$ $P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 3\sqrt{7} + 9 = 3\left(\sqrt{7} + 3\right)$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(-1)\right) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$ $= -4 + 1 + (-1) - (-2) - (-1) - 2 = -3$	**2p** **3p**
b)	$\det\left(A(a)\right) = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = -6a^2 - a + 2$, pentru orice număr real a Sistemul de ecuații admite soluție unică $\Leftrightarrow \det\left(A(a)\right) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$	**2p** **3p**
c)	Cum a este număr întreg, obținem că $\det\left(A(a)\right) \neq 0$, deci $(1, y_0, z_0)$ este unica soluție a sistemului de ecuații $1 = \frac{3a}{-6a^2 - a + 2} \Leftrightarrow 3a^2 + 2a - 1 = 0$ și, cum a este număr întreg , obținem $a = -1$	**2p** **3p**
2.a)	$x \circ 0 = x + 5 \cdot x \cdot 0 + 0 = x$, pentru orice număr real x $0 \circ x = 0 + 5 \cdot 0 \cdot x + x = x$, pentru orice număr real x, deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**2p** **3p**

b)	$x \circ y = 5xy + x + y + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 5x\left(y + \frac{1}{5}\right) + \left(y + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5} =$	**3p**
	$= \left(y + \frac{1}{5}\right)(5x+1) - \frac{1}{5} = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(y + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$x \circ \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{5}$ și $\left(-\frac{1}{5}\right) \circ y = -\frac{1}{5}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$q = \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\right) \circ \left(-\frac{1}{4}\right)\right) \circ \left(-\frac{1}{5}\right) \circ \left(-\frac{1}{6}\right) \circ \ldots \circ \left(-\frac{1}{2021}\right) = \left(-\frac{1}{5}\right) \circ \left(\left(-\frac{1}{6}\right) \circ \ldots \circ \left(-\frac{1}{2021}\right)\right) = -\frac{1}{5}$, deci $[q] = -1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = (x+1)' \cdot \ln x + (x+1) \cdot (\ln x)' =$	**2p**
	$= 1 \cdot \ln x + (x+1) \cdot \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$, $x \in (0, +\infty)$	**3p**
b)	$f'(1) = 2$, $f(1) = 0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, adică $y = 2x - 2$	**3p**
c)	$f''(x) = \frac{x-1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
	$f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este convexă pe $[1, +\infty)$	**3p**
2.a)	$g(x) = x^3 + 1$, $x \in \mathbb{R}$, deci $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = \frac{x^4}{4} + x + c$, unde $c \in \mathbb{R}$	**3p**
	Cum $G(0) = 2021$, obținem $c = 2021$, deci $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = \frac{x^4}{4} + x + 2021$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \operatorname{arctg} x\right)\Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$	**2p**
c)	$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{x^n+1}{x^2+1} \leq \frac{x^2+1}{x^2+1}$, pentru orice $x \in [0,1]$ și pentru orice număr natural n, $n \geq 2$, deci $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 1\,dx$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**3p**
	$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x \Big\|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ și $\int_0^1 1\,dx = x \Big\|_0^1 = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq 1$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**2p**