

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați partea reală a numărului complex $z = (1 + i\sqrt{3})^2 - (1 - i\sqrt{3})^2$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - 2x$. Arătați că $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) \cdot f(5) < 0$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = 2$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Determinați numărul de submulțimi cu 3 elemente ale lui A , care conțin exact 2 numere impare.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul ABC și punctele M , N și P astfel încât $\overline{AM} = 2\overline{AB}$, $\overline{BN} = 2\overline{BC}$ și $\overline{CP} = 2\overline{CA}$. Știind că O este un punct oarecare din plan, arătați că $\overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.
- 5p** 6. Știind că $x \in (\pi, 2\pi)$ și $\cos 2x = \frac{1}{3}$, calculați $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 3 & a & 2 \\ 2 & a & 5 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + ay + 2z = 4 \\ 3x + ay + 2z = 1 \\ 2x + ay + 5z = b \end{cases}$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = -3$.
- 5p** b) Pentru $a = -1$ și $b = -2$, rezolvați sistemul de ecuații.
- 5p** c) Determinați numerele reale a și b pentru care sistemul de ecuații este compatibil nedeterminat.
2. Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2} + 2$.
- 5p** a) Arătați că $x * y = \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} + 1$, pentru orice $x, y \in G$.
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p** c) Știind că $(G, *)$ este grup, demonstrați că funcția $f: M \rightarrow G$, $f(x) = \sqrt{x+1}$ este un izomorfism de la grupul (M, \cdot) la grupul $(G, *)$, unde $M = (0, +\infty)$ și „ \cdot ” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^{-x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = -xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(f(n))^n}{e^n (f(n+1))^n}$.
- 5p** c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $f(x) = m$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{2}{x+1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x) dx = 2 \ln 2$.

5p b) Calculați $\int_1^e \left(f(x) - \frac{2}{x+1} \right) \ln x dx$.

5p c) Determinați $a \in (0, +\infty)$ pentru care $\int_0^1 2f(x)F(x) dx = \frac{1}{4} + \ln 4 + \ln^2 a$, unde F este primitiva funcției f pentru care $F(0) = 0$.

<https://variante-mate.ro>