Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$5+2\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)^2=5+2\sqrt{3}-\left(4+2\sqrt{3}\right)=$	**3p**
	$=5+2\sqrt{3}-4-2\sqrt{3}=1$, care este număr întreg	**2p**
2.	$2m+1=2m^2+2m \Leftrightarrow m^2=\frac{1}{2}$	**3p**
	$m=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $m=\frac{1}{\sqrt{2}}$	**2p**
3.	$x^2+5x+1=2x+5 \Rightarrow x^2+3x-4=0$	**3p**
	$x=-4$, care nu convine, sau $x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile	**2p**
	Numerele a din mulțimea A care verifică inegalitatea $\lvert a+1\rvert \geq 2$ sunt 1, 2 și 3, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{5}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$, $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$	**2p**
	$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}$, deci $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$	**3p**
6.	$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=2R$ și, cum $R=1$, obținem $BC=2\sin A$ și $AC=2\sin B$	**3p**
	$4\sin A\cdot\sin B=2\sin B\cdot 2\sin A=AC\cdot BC$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2,3)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(2,3)\right)=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=3-3=0$	**3p**
b)	$\det\left(A(a,b)\right)=\begin{vmatrix}a+1 & a-1\\ b & b-2\end{vmatrix}=(a+1)(b-2)-b(a-1)=2(b-a-1)$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
	$a\in\mathbb{Q}$ și $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow b-a-1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow \det\left(A(a,b)\right)\neq 0$, deci $A(a,b)$ este inversabilă	**2p**
c)	$A\left(-1,\sqrt{2}\right)=\begin{pmatrix}0 & -2\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}-2\end{pmatrix}$, $\det\left(A\left(-1,\sqrt{2}\right)\right)=2\sqrt{2}$, $\left(A\left(-1,\sqrt{2}\right)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=\left(A\left(-1,\sqrt{2}\right)\right)^{-1}\cdot A(0,0)$ și, cum $A(0,0)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, obținem $X=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{2}}{2} & -\frac{1+\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$1\circ 4=5\cdot 1\cdot 4+1+4=$ $=20+5=25$	**2p** **3p**
b)	$x\circ 0=5x\cdot 0+x+0=x$, pentru orice număr întreg x $0\circ x=5\cdot 0\cdot x+0+x=x$, pentru orice număr întreg x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**2p** **3p**
c)	$x\in\mathbb{Z}$ element simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$\circ$”$\Leftrightarrow$ există $x'\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x\circ x'=x'\circ x=0\Leftrightarrow 5xx'+x+x'=0$, deci $x'=\dfrac{-x}{5x+1}$ și, cum $x,x'\in\mathbb{Z}$, obținem $5x+1=-1$ sau $5x+1=1$ $x=-\dfrac{2}{5}$, care nu convine, sau $x=0$, care convine	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{3x^2\left(x^2+1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$ $=\dfrac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3+x}=1$, deci panta dreptei d este 1 Tangenta la graficul lui f în $A(a,f(a))$ are panta 1, dacă $f'(a)=1\Leftrightarrow\dfrac{a^2\left(a^2+3\right)}{\left(a^2+1\right)^2}=1$, de unde obținem $a^2=1$, deci $a=-1$ sau $a=1$	**2p** **3p**
c)	$f''(x)=\dfrac{2x\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$, $x\in\mathbb{R}$ Cum $f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\left[0,\sqrt{3}\right]$, obținem că funcția f este convexă pe $\left[0,\sqrt{3}\right]$	**2p** **3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^{\pi}\frac{e^x\cos x}{e^x}dx=\int_0^{\pi}\cos x\,dx=$ $=\sin x\Big\vert_0^{\pi}=\sin\pi-\sin 0=0$	**2p** **3p**
b)	$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=e^x\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(\cos x)'dx=-1+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx=-1+e^x\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=$ $\displaystyle=-1+e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx$, deci $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$	**3p** **2p**
c)	$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{e^{x+\frac{\pi}{2}}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{e^x\cos x}dx=e^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{-\sin x}{\cos x}dx=e^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{3}}=$ $=e^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)-e^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos 0)=e^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1}{2}-e^{\frac{\pi}{2}}\ln 1=-e^{\frac{\pi}{2}}\ln 2$	**3p** **2p**