Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge 1}$ cu $a_1 = 1-3\sqrt{3}$ și rația $r=\sqrt{3}$. Arătați că partea fracționară a lui a_5 este egală cu $\sqrt{3}-1$.
5p	**2.** Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Arătați că numărul $f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)$ este natural.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(5x-1)=2\log_3(x+1)$.
5p	**4.** Determinați numărul de mulțimi X cu proprietatea $\{1,2,3\}\subset X\subset\{1,2,3,4,5\}$.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+b\vec{j}$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b, știind că $2\vec{u}+3\vec{v}=\vec{0}$.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic isoscel, cu ipotenuza $BC=8\sqrt{2}$. Arătați că raza cercului înscris în ΔABC este egală cu $4\left(2-\sqrt{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1&a\\a^2&a^3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(a))=0$, pentru orice număr real a.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(2)+xI_2)=0$.
5p	**c)** Arătați că, dacă $A(a)\cdot A(b)=A(b)\cdot A(a)$, atunci $a=b$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\sqrt[3]{x^2+y^2}$.
5p	**a)** Arătați că $0*8=4$.
5p	**b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” **nu** are element neutru.
5p	**c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care numărul $m*n$ este natural nenul.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x+1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $\ln x\ge\sqrt{\ln x+1}+1-\sqrt{2}$, pentru orice $x\in[e,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)$.
5p	**a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}\,dx=\frac{10}{3}$.
5p	**b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.
5p	**c)** Determinați numerele reale a, b și c astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x\left(ax^2+bx+c\right)$ este o primitivă a funcției f.