**Examenul naţional de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_şt-nat***

**Model**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

## SUBIECTUL I (30 de puncte)

**5p** **1.** Arătați că numerele $\log_2 3$, $\log_2 6$ și $\log_2 12$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+1$. Determinați numărul real $x$ pentru care $f(x)=x$.

**5p** **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $|2x-1|=2x+1$.

**5p** **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor pară și cifra unităților impară.

**5p** **5.** Determinaţi numărul real $a$, pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+\vec{j}$ și $\vec{v}=8\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

**5p** **6**. În triunghiul $ABC$ dreptunghic în $A$, $BC=12$ și $B=\frac{\pi}{6}$. Arătați că aria triunghiului $ABC$ este egală cu $18\sqrt{3}$.

## SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a-1 & 4a-4\\ 1-a & 3-2a\end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(2))=1$.

**5p** **b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-1)$, pentru orice numere reale $a$ și $b$.

**5p** **c)** Determinați numărul natural $n$, știind că $A(1)\cdot A(2)\cdot A(2^2)\cdot A(2^3)\cdot A(2^4)=A(32)\cdot A(-n)$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=3x^2-5xy+2y^2$.

**5p** **a)** Arătați că $1\circ 2=1$.

**5p** **b)** Demonstrați că $x\circ x=0$, pentru orice număr real $x$.

**5p** **c)** Determinați numerele reale $x$ pentru care $2^x\circ 3^x=0$.

## SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}-1$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\sqrt{\left(x^2+1\right)^2+2\left(x^2+1\right)+2}-\sqrt{4x^2+4x+2}\leq(x-1)^2$, pentru orice număr real $x$.

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1\left(4-f^2(x)\right)dx=\pi$.

**5p** **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

**5p** **c)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f\left(x^2\right)}{x}dx=\ln\left(\sqrt{34}-\sqrt{17}+4\sqrt{2}-4\right)$.