Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Centrul Național de Evaluare şi Examinare

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ — Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați $\left((1-i)(i-1)\right)^4$.

5p **2.** Arătați că funcția $f:(-3,3)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\frac{3-x}{3+x}$ este impară.

5p **3.** Determinați soluțiile întregi ale inecuației $x^2+2x-8<0$.

5p **4.** Câte elemente din mulțimea $A=\{1,2,3,...,100\}$ sunt divizibile cu 4 sau cu 5?

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $M(1,-2)$, $N(-3,-1)$ şi $P(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului Q astfel încât $MNPQ$ să fie paralelogram.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=6,\ AC=3$ şi $BC=5$. Calculați lungimea înălțimii $[AD]$.

Soluții

Subiectul 1

1. $\left((1-i)(i-1)\right)^4=\left(i-1+1+i\right)^4=\left(2i\right)^4=16$.

2. $f(-x)=\ln\frac{3+x}{3-x}=\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{3-x}{3+x}=-f(x),\forall x\in(-3,3)$ deci funcţia este impară.

3. Ecuaţia ataşată inecuaţiei date este:

$x^2+2x-8=0$ care are rădăcinile $x_1=-4$ şi $x_2=2$.

Se face tabelul cu semnul funcţiei de gradul doi şi se obţine soluţia $x\in(-4,2)\cap\square=\{-3,-2,-1,0,1\}$.

4. 25 de numere sunt divizibile cu 4
20 de numere sunt divizibile cu 5
5 de numere sunt divizibile cu 4 şi 5
Deci 40 numere sunt divizibile cu 4 sau cu 5.

5. Fie $Q(a,b)$.

Avem $\overrightarrow{MQ}=(a-1)\vec{i}+(b+2)\vec{j}$

şi $\overrightarrow{NP}=2\vec{i}+3\vec{j}$

MNPQ este paralelogram $\Leftrightarrow\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}\Leftrightarrow a-1=2$ şi $b+2=3$

Punctul căutat este $Q(3,1)$.

6. Semiperimetrul triunghiului ABC este $p=\frac{6+3+5}{2}=7$.

Aria triunghiului ABC se calculează cu formula lui Heron:

$A_{\Delta ABC}=\sqrt{7(7-6)(7-3)(7-5)}=\sqrt{7\cdot4\cdot2}=2\sqrt{14}$

$$A_{\Delta ABC}=\frac{BC\cdot AD}{2}\Rightarrow\frac{5\cdot AD}{2}=2\sqrt{14}\Rightarrow AD=\frac{4\sqrt{14}}{5}.$$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Fie sistemul $\begin{cases}x-2y-8z=-65\\3x+y-3z=22\\x+y+z=28\end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi matricea asociată sistemului $A=\begin{pmatrix}1&-2&-8\\3&1&-3\\1&1&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că rangul matricei A este egal cu 2.

5p **b)** Rezolvaţi sistemul în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinaţi numărul soluţiilor sistemului din mulţimea $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

2. Fie mulţimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

5p **a)** Determinaţi numărul elementelor mulţimii A.

5p **b)** Arătaţi că există o matrice nenulă $M\in A$ astfel încât $\begin{pmatrix}\hat{3}&\hat{1}\\-\hat{1}&\hat{3}\end{pmatrix}\cdot M=\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}\end{pmatrix}$.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea A ecuaţia $X^2=I_2$.

Soluţii

Subiectul 2

1.a) $\begin{vmatrix}1&-2\\3&1\end{vmatrix}=1+6=7\neq0$ rang $A\geq2$

$$\begin{vmatrix}1&-2&-8\\3&1&-3\\1&1&1\end{vmatrix}=1-24+6+8+3+6=0\Rightarrow \text{rang } A=2.$$

b) Determinantul caracteristic este:

$$d_c=\begin{vmatrix}1&-2&-65\\3&1&22\\1&1&28\end{vmatrix}=28-44-195+65-22+168=261-261=0$$, sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

Luăm $z=\alpha$.

$$\begin{cases}x-2y=8\alpha-65\\3x+y=3\alpha+22\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y=8\alpha-65\\6x+2y=6\alpha+44\end{cases}\Rightarrow x=2\alpha-3$$

$6\alpha-9+y=3\alpha+31\Rightarrow y=31-3\alpha$

Solutia sistemului este: $\begin{cases}x=2\alpha-3\\y=31-3\alpha,\alpha\in\square\\z=\alpha\end{cases}$ .Sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

c) $\begin{cases}2\alpha-3\geq0\\31-3\alpha\geq0\\\alpha\geq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha\geq\frac{3}{2}\\\alpha\leq\frac{31}{3}\\\alpha\geq0\end{cases}\Rightarrow\alpha\in\{2,3,4,....,10\}$, deci sistemul are 9 solutii in multimea $\square\times\square\times\square$.

2.a) $a,b\in\mathbb{Z}_5$ iar $\mathbb{Z}_5=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$ deci $card\mathbb{Z}_5=5$.

Rezultă că mulţimea A are 25 de elemente.

b) $\begin{pmatrix}\hat{3} & \hat{1}\\ -\hat{1} & \hat{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\hat{3}a-b & \hat{3}b+a\\ -a-\hat{3}b & \hat{3}a-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}\hat{3}a-b=\hat{0}\\ a+\hat{3}b=\hat{0}\end{cases}$ care are o soluţie $a=\hat{2}$ şi $b=\hat{1}$ deci putem lua de exemplu $M=\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{1}\\ -\hat{1} & \hat{2}\end{pmatrix}\in A$.

c) Dacă $X=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$ atunci $X^2=I_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x^2-y^2 & \hat{2}xy\\ -\hat{2}xy & x^2-y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=\hat{1}\\ x\cdot y=\hat{0}\end{cases}$

<u>Cazul 1</u>.Dacă $x=\hat{0}$ atunci $y^2=\hat{4}\Rightarrow y\in\{\hat{2},\hat{3}\}$ deci obţinem matricele $\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{2}\\ -\hat{2} & \hat{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{3}\\ -\hat{3} & \hat{0}\end{pmatrix}$

<u>Cazul 2</u>.Dacă $y=\hat{0}$ atunci $x^2=\hat{1}\Rightarrow x\in\{\hat{1},\hat{4}\}$ şi mai obţinem matricele $\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{4} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{4}\end{pmatrix}$.

In total ecuaţia $X^2=I_2$ are 4 soluţii scrise mai sus.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}$.

5p **a)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

5p **b)** Studiaţi monotonia funcţiei *f*.

5p **c)** Determinaţi punctele de inflexiune ale funcţiei *f*.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\geq1}$, $I_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{2x-1}{x}dx$.

5p **a)** Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq1}$ este strict crescător.

5p **b)** Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq1}$ este mărginit.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}n(2-I_n)$.

Soluţii

Subiectul 3

1.a) Căutăm asimptotă orizontală:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}arctg\dfrac{x}{x+1}=arctg1=\dfrac{\pi}{4}$ deci graficul funcţiei are asimpotă orizontală spre $+\infty$ de ecuaţie $y=\dfrac{\pi}{4}$.

Observaţie:Dacă graficul are asimptotă orizontală spre $+\infty$ atunci nu mai are asimptotă oblică spre $+\infty$.

b) $f'(x)=\left(arctg\dfrac{x}{x+1}\right)'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{x}{x+1}\right)'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2}\cdot\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2+x^2}>0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

deci funcţia este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty,-1)$ şi $(-1,+\infty)$.

c) $f''(x)=\dfrac{1}{2x^2+2x+1}$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2x^2+2x+1}\right)'=-\frac{4x+2}{\left(2x^2+2x+1\right)^2}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow 4x+2=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Tabelul cu semnul derivatei a doua este:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	+ + + + +	+ + + +			0	– – – –	
$f(x)$		⌣		⌣		⌢	

Din tabelul de variaţie rezultă că funcţia f are un singur punct de inflexiune şi anume x= $-\frac{1}{2}$.

2. $I_n=\int_n^{n+1}\frac{2x-1}{x}dx=\int_n^{n+1}\left(2-\frac{1}{x}\right)dx=\left(2x-\ln x\right)\Big|_n^{n+1}=\left[2n+2-\ln(n+1)\right]-(2n-\ln n)=2-\ln(n+1)+\ln n=$

$=2-\left[\ln(n+1)-\ln n\right]\Rightarrow I_n=2-\ln\frac{n+1}{n}$.

a) $I_{n+1}-I_n=2-\ln\frac{n+2}{n+1}-2+\ln\frac{n+1}{n}=\ln\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}=$

$=\ln\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}>\ln 1=0\Rightarrow(I_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

b) $I_n\geq I_1=2-\ln 2,\forall n\geq 1$ deoarece şirul este crescător.

$I_n=2-\ln\frac{n+1}{n}<2\Rightarrow 2-\ln 2\leq I_n<2;\forall n\geq 1$, deci sirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}n(2-I_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(2-2+\ln\frac{n+1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ln e=1$

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ — Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

BAREM DE CORECTARE ȘI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I — **30 de puncte**

1.	$\left((1-i)(i-1)\right)^4=(2i)^4=$	**3p**
	$=16$	**2p**
2.	$f(-x)=\ln\frac{3+x}{3-x}=$	**2p**
	$=\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{3-x}{3+x}=$	**2p**
	$=-f(x)$	**1p**
3.	$x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$	**2p**
	$x\in(-4,2)$	**1p**
	$(-4;2)\cap\mathbb{Z}=\{-3,-2,-1,0,1\}$	**2p**
4.	25 de numere sunt divizibile cu 4	**1p**
	20 de numere sunt divizibile cu 5	**1p**
	5 numere sunt divizibile cu 4 și cu 5	**1p**
	Deci 40 de numere sunt divizibile cu 4 sau cu 5	**2p**
5.	Fie $Q(a,b)$. Avem $\overrightarrow{MQ}=(a-1)\vec{i}+(b+2)\vec{j}$ și $\overrightarrow{NP}=2\vec{i}+3\vec{j}$	**2p**
	$MNPQ$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP} \Leftrightarrow a-1=2$ și $b+2=3$	**2p**
	Punctul căutat este $Q(3,1)$	**1p**
6.	$A_{ABC}=2\sqrt{14}$	**3p**
	$AD=\frac{4\sqrt{14}}{5}$	**2p**

SUBIECTUL II — **30 de puncte**

1.a)	$\det(A)=0$	**3p**
	$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=7$ (sau orice alt minor de ordinul 2 nenul), deci rangul matricei A este 2	**2p**
b)	Minorul caracteristic este nul, deci sistemul este compatibil nedeterminat	**2p**
	De exemplu, luând $z=\alpha$ necunoscută secundară se obține $x=2\alpha-3,\ y=31-3\alpha,\ z=\alpha$	**3p**
c)	$x=2\alpha-3\geq 0,\ y=31-3\alpha\geq 0,\ z=\alpha\geq 0\Rightarrow$	**1p**
	$\frac{3}{2}\leq\alpha\leq\frac{31}{3}$	**2p**
	$\alpha\in\{2,3,4,\ldots,10\}$	**1p**
	Sunt 9 soluții în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$	**1p**
2.a)	$a,b\in\mathbb{Z}_5$ și $\operatorname{card}\mathbb{Z}_5=5$	**2p**
	Deci mulțimea A are 25 de elemente	**3p**

b)	$\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{3}a-b & \hat{3}b+a \\ -a-\hat{3}b & -b+\hat{3}a \end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix} \hat{3}a-b & \hat{3}b+a \\ -a-\hat{3}b & -b+\hat{3}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ dacă $\hat{3}a=b$ și $\hat{3}b=-a$	**1p**
	Un exemplu: $M=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{3} \\ -\hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix}$	**2p**
c)	Dacă $X=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ atunci $X^2=I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2-y^2 & \hat{2}xy \\ -\hat{2}xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow x^2-y^2=\hat{1}$ și $xy=\hat{0}$	**1p**
	Dacă $x=\hat{0} \Rightarrow y^2=\hat{4} \Rightarrow y \in \{\hat{2};\hat{3}\}$; dacă $y=\hat{0} \Rightarrow x^2=\hat{1} \Rightarrow x \in \{\hat{1};\hat{4}\}$	**2p**
	Obținem matricele $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ -\hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{3} \\ -\hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{4} \end{pmatrix}$	**2p**

SUBIECTUL III **30 de puncte**

1.a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{\pi}{4}$	**3p**
	Deci $y=\frac{\pi}{4}$ este asimptota orizontală spre $+\infty$.	**2p**
b)	$f'(x)=\frac{1}{2x^2+2x+1}$	**2p**
	$2x^2+2x+1>0$ pentru orice x real, deci $f'(x)>0,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	**2p**
	Funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty,-1)$ și pe $(-1,+\infty)$	**1p**
c)	$f''(x)=\frac{-2(2x+1)}{(2x^2+2x+1)^2},\ x\neq -1$	**2p**
	$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$	**1p**
	Din tabelul de variație rezultă că $x=-\frac{1}{2}$ este punct de inflexiune al funcției f	**2p**
2.a)	$I_n=\int_n^{n+1}\left(2-\frac{1}{x}\right)dx=(2x-\ln x)\Big\vert_n^{n+1}=2-\ln\frac{n+1}{n}$	**2p**
	$I_{n+1}-I_n=\ln\frac{n+1}{n}-\ln\frac{n+2}{n+1}=$	**1p**
	$=\ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\ln\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=\ln\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, deci șirul este strict crescător	**2p**
b)	$1<\frac{n+1}{n}\le 2<e \Rightarrow 0<\ln\frac{n+1}{n}<1$	**2p**
	$1<2-\ln\frac{n+1}{n}<2$	**2p**
	$1<I_n<2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, deci șirul este mărginit	**1p**
c)	$\lim\limits_{n\to\infty} n(2-I_n)=\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{n+1}{n}=$	**2p**

	$= \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1$	**3p**