Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$ este întreg.

5p **2.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-x+2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{-2x+1}=5$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a+b=4$.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-1,1)$ și este perpendiculară pe dreapta $d:5x-4y+1=0$.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC știind că $AB=6$, $B=\frac{\pi}{4}$ și $C=\frac{\pi}{6}$.

Soluții

Subiectul I

1. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3=\left[2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^3=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^3=8\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-8\in\mathbb{Z}$

2. $\operatorname{Im} f=\left[-\frac{\Delta}{4a};+\infty\right)$

$\Delta=b^2-4ac=1-8=-7$

$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{-7}{4}=\frac{7}{4}\Rightarrow \operatorname{Im} f=\left[\frac{7}{4};+\infty\right)$

3. Punem **condiții de existență**:

$-2x+1\geq 0\Leftrightarrow x\leq\frac{1}{2}$

Pentru **rezolvare** ridicăm la pătrat fiecare membru al ecuației și avem:

$-2x+1=25\Rightarrow 2x=-24\Rightarrow x=-12$

Facem **verificarea** soluției obținute (etapă obligatorie la ecuațiile iraționale!)

$\sqrt{-2\cdot(-12)+1}=5$ adevărat.

4. Numerele naturale de două cifre sunt 10,11,12,13,...,99.

In total sunt 90 numere naturale de două cifre adică sunt 90 cazuri posibile.

Condiția a+b=4 este verificată de numerele 13,31,22,40 adică sunt 4 cazuri favorabile.

Aplică formula pentru calculul probabilității și avem:

$P(E)=\frac{nr.\ cazuri\ favorabile}{nr.\ total\ cazuri\ posibile}=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$.

5. Ecuația dreptei d se mai poate scrie sub forma $y=\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}$ deci dreapta d are panta $m_d=\frac{5}{4}$.

Fie d' dreapta care trece prin A şi este perpendiculară pe d.

$d \perp d' \Leftrightarrow m_d \cdot m_{d'} = -1 \Leftrightarrow \frac{5}{4} \cdot m_{d'} = -1 \Leftrightarrow m_{d'} = -\frac{4}{5}$

Dreapta d' are ecuaţia dată de formula $y - y_0 = m_{d'}(x - x_0)$

$y - 1 = -\frac{4}{5}(x+1)$

$5y - 5 = -4x - 4$

$\Rightarrow d' : 4x + 5y - 1 = 0$

6. Folosim teorema sinusurilor şi avem:

$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$

$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{6}{\sin\frac{\pi}{6}}$

$\Rightarrow AC = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{2}$

$\sin A = \sin\left(\pi - (B+C)\right) = \sin(B+C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$BC = \frac{6\sin A}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}} = 3\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right).$

Perimetrul este $P = AB + AC + BC = 6 + 6\sqrt{2} + 3\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) = 6 + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{6} = 3\left(2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că $\det(A) = (a-b)(a-1)$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(A - A^t\right)$.

5p **c)** Să se arate că $\operatorname{rang} A \geq 2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + pX^2 + qX + r$, cu $p, q, r \in (0, \infty)$ şi cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Să se demonstreze că f nu are rădăcini în intervalul $[0, \infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ în funcţie de p, q şi r.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă a, b, c sunt trei numere reale astfel încât $a + b + c < 0$, $ab + bc + ca > 0$ şi $abc < 0$, atunci $a, b, c \in (-\infty, 0)$.

Soluţii

Subiectul II

1.a) $\det A=\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-b & a-b & a-b \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a-b)(ab+a+b+b+2-b-1-$

$ab-b-2)=(a-b)(a-1)$.

Am scăzut a doua linie din prima linie.

b) $\det\left(A-A^t\right)=\det\left(\left(A-A^t\right)^t\right)=\det\left(A^t-A\right)=-\det\left(A-A^t\right)$

deci $\det\left(A-A^t\right)=0$.

c) $\begin{vmatrix} b & b+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=b-b-1=-1\neq 0$ deci $rangA\geq 2$.

2.a) Fie $\alpha\geq 0$.

$f(\alpha)=\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r>0$ deci $f(\alpha)\neq 0,\forall\alpha\geq 0$.

b) Scriem relaţiile lui Viete

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-p \\ x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=q \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=-r \end{cases}$$

$\left(x_1+x_2+x_3\right)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\left(x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3\right)\Rightarrow$

$p^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2q\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=p^2-2q.$

x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f deci avem

$x_1^3+px_1^2+qx_1+r=0$

$x_2^3+px_2^2+qx_2+r=0$ Adunăm membru cu membru şi obţinem:

$x_3^3+px_3^2+qx_3+r=0$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3+p\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+q\left(x_1+x_2+x_3\right)+3r=0$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3+p\left(p^2-2q\right)-qp+3r=0$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=3pq-p^3=3pq-p^3-3r$

c) Considerăm polinomul $g=\left(X-a\right)\left(X-b\right)\left(X-c\right)=X^3-\left(a+b+c\right)X^2+\left(ab+ac+bc\right)X-abc$

care are radăcinile a,b,c.

Luăm $p=-\left(a+b+c\right)>0$

$q=ab+ac+bc>0$

$r=-abc>0$

Conform punctului a) radăcinile lui g nu sunt in intervalul $\left[0,+\infty\right)$

deci $a,b,c\in\left(-\infty,0\right)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+\ln(x^2+x+1)$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este bijectivă.

5p **c)** Să se arate că graficul funcției f nu are asimptotă oblică spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\{x\}(1-\{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că valoarea integralei $\int_a^{a+1} f(x)dx$ nu depinde de numărul real a.

Soluții

Subiectul III

1.a) $f'(x)=2+\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}=\dfrac{2(x+1)^2+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ deci funcţia este crescătoare pe **R**.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2x+\ln(x^2+x+1)\right]\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty} x\left[2+\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x}\right]=-\infty(2+0)=-\infty$

deoarece $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\ln(x^2+x+1)\right)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)'}{\left(x^2+x+1\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{2x+1}=\dfrac{2}{\infty}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x+\ln(x^2+x+1)\right]=+\infty$.

In plus funcţia este continuă pe **R** deci $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$ (funcţia este surjectivă).

Deoarece funcţia este strict crescătoare rezultă că este şi injectivă deci este bijectivă.

c) Deoarece $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ rezultă că funcţia nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Căutăm asimptotă oblică spre $+\infty$.

$y=mx+n$

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left[2x+\ln(x^2+x+1)\right]}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2+\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x}\right]=2.$

$n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x^2+x+1)\right]=+\infty.$ deci funcţia nu are nici asimptotă oblică.

2.a) $f(x)=x(1-x),\forall x\in[0,1]$

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x(1-x)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$.

b) $f(x+1)=\{x+1\}(1-\{x+1\})=\{x\}(1-\{x\})=f(x)$ deci funcţia este periodică de perioadă 1.

$\lim\limits_{x\square 1} f(x) = \lim\limits_{x\square 1} x(1-x) = 0$

$\lim\limits_{x\square 1} f(x) = \lim\limits_{x\square 1}(x-1)(2-x) = 0$ deci funcţia este continuă in punctul x=1.

$f(1) = 0$

f este continuă pe (0,1] periodică cu perioada 1 deci este continuă pe **R**.

Rezultă că f are primitive pe **R**.

c)Fie F o primitivă a funcţiei f.

Notăm $g(a) = \int_a^{a+1} f(x)dx$

$g(a) = \int_a^{a+1} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{a+1} = F(a+1) - F(a)$

$g'(a) = F'(a+1) - F'(a) = f(a+1) - f(a) = 0, \forall a \in \square$ deci funcţia g este constantă.

Examenul de bacalaureat 2009
Proba D_MT1
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

BAREM DE CORECTARE ȘI DE NOTARE

Subiecte 2009

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	Aplicarea corectă a formulei $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3=-8\in\mathbb{Z}$	**2p** **3p**
2.	$\Delta=1-8=-7$ $\operatorname{Im} f=\left[\frac{7}{4},+\infty\right)$	**2p** **3p**
3.	$-2x+1=25\Rightarrow x=-12$ -12 verifică ecuația	**3p** **2p**
4.	Există 90 de numere naturale cu 2 cifre Cazurile favorabile sunt: 13, 22, 31, 40 $p=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$	**2p** **2p** **1p**
5.	$m_d=\frac{5}{4}\Rightarrow m_{d'}=-\frac{4}{5}$ $d':y-1=-\frac{4}{5}(x+1)\Leftrightarrow 4x+5y-1=0$	**2p** **3p**
6.	$A=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow \sin A=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ Din teorema sinusurilor rezultă $AC=6\sqrt{2}$ și $BC=3\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$ $P=3\left(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea **30 de puncte**

1.a)	$\det(A)=\begin{vmatrix} a-b & a-b & a-b \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix}=$ $=(a-b)(a-1)$	**3p** **2p**
b)	$\det\left(A-A^t\right)=\det\left(\left(A-A^t\right)^t\right)=\det\left(A^t-A\right)=-\det\left(A-A^t\right)$ deci $\det\left(A-A^t\right)=0$.	**4p** **1p**
c)	Minorul $\begin{vmatrix} b & b+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ Deci rangul lui A mai mare sau egal cu 2	**4p** **1p**
2.a)	Pentru orice $\alpha\in[0,\infty)$, avem $f(\alpha)=\alpha^3+p\cdot\alpha^2+q\cdot\alpha+r>0$ Deci $f(\alpha)\neq 0,\ \forall\alpha\geq 0$	**4p** **1p**

b)	$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -p$	**1p**
	$s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q \Rightarrow S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2s_2 = p^2 - 2q$	**2p**
	$S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -p \cdot S_2 - q \cdot S_1 - 3r = -p^3 + 3pq - 3r$	**2p**
c)	$g \in \mathbb{R}[X]$, $g = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ca)X - abc$, are rădăcinile reale a, b, c	**2p**
	Deoarece $p = -(a+b+c) > 0$, $q = ab+bc+ca > 0$ și $r = -abc > 0$, din punctul a) rezultă că rădăcinile lui g nu sunt în intervalul $[0, \infty)$	**2p**
	Rezultă $a, b, c \in (-\infty, 0)$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **30 de puncte**

1.a)	$f'(x) = 2 + \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1} =$	**3p**
	$= \frac{2(x+1)^2+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	f strict crescătoare, rezultă f injectivă	**2p**
	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$	**3p**
c)	$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$	**2p**
	$n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - 2x) = +\infty$	**2p**
	Deci nu există asimptotă oblică spre $+\infty$	**1p**
2.a)	$f(x) = x(1-x),\ \forall x \in [0,1]$	**3p**
	$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{1}{6}$	**2p**
b)	$f(x+1) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ periodică cu perioadă 1	**1p**
	$\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 1}(x-1)(2-x) = 0$, $f(1) = 0$	**2p**
	f continuă pe $(0,1]$, f periodică cu perioadă 1, rezultă f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci f are primitive	**2p**
c)	Funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(a) = \int_a^{a+1} f(x)dx$ este derivabilă	**2p**
	$g'(a) = f(a+1) - f(a) = 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$	**2p**
	deci g este constantă	**1p**