Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Să se calculeze $(f\circ f)(512)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\cos 2x+\sin x=0$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $M=\{0,1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c\in M$ și $a<b<c$.

5p **5.** Să se calculeze distanța dintre dreptele paralele de ecuații $x+2y=6$ și $2x+4y=11$.

5p **6.** Paralelogramul $ABCD$ are $AB=1$, $BC=2$ și $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

Soluții

Subiectul I

1. $z=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$z^6=2^6\left(\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}\right)=2^6\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-2^6 \quad \Rightarrow \operatorname{Re} z=-2^6=-64$.

2. $f(512)=\frac{1}{\sqrt[3]{512}}=\frac{1}{8}$ rezultă $(f\circ f)(512)=f\left(f(512)\right)=f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}=2$.

3.Stim formula $\cos 2x=1-2\sin^2 x$.Inlocuim in ecuaţia dată şi obţinem:

$2\sin^2 x-\sin x-1=0$ care are soluţiile $\sin x=1$ şi $\sin x=-\frac{1}{2}$.

Din $\sin x=1$ obţinem $x\in\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ iar din $\sin x=-\frac{1}{2}$ obţinem $x\in\left\{(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$

Soluţia ecuaţiei date este $x\in\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4.Numărul cerut este egal cu numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii M.

Acesta este $C_6^3=\frac{6!}{3!\cdot 3!}=20$.

5.Luăm un punct pe prima dreaptă,de exemplu A(0,3).

Distanţa de la punctul A la cea de a doua dreaptă este $AA' = \frac{|2\cdot 0+4\cdot 3-11|}{\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{20} = \frac{2\sqrt{5}}{20} = \frac{\sqrt{5}}{10}$.

6. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 1\cdot 2\cdot\cos 60^o = 1$

$\overrightarrow{AD}^2 = 2\cdot 2\cdot\cos 0^o = 4$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = 1+4 = 5$

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $a,b,c\in\mathbb{R}^*$, se consideră sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$, $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Ştiind că $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, să se arate că sistemul are o infinitate de soluţii (x,y,z), astfel încât $x^2+y^2=z-1$.

2. Se consideră mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix} \middle| \ a,b,c\in\mathbb{Z}_4\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulţimii G.

5p **b)** Să se dea un exemplu de matrice $A\in G$ cu proprietatea că $\det A\neq\hat{0}$ şi $\det A^2=\hat{0}$.

5p **c)** Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $X^2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$, $X\in G$.

Soluţii

Subiectul II

1.a) Determinantul sistemului este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)$$

b) Folosim formulele lui Cramer $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} b & b & c \\ a & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix} = 0$ deoarece determinantul are două coloane egale

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \Delta$$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & a & a \\ b & c & c \end{vmatrix} = 0$ şi obţinem $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

c) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$

In acest caz cele trei ecuaţii din sistem devin identice şi anume: $x + y + z = 1$.

Dacă notăm $x = \alpha$, $y = \beta$ rezultă $\begin{cases} z = 1 - \alpha - \beta \\ z = \alpha^2 + \beta^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow 1 - \alpha - \beta = \alpha^2 + \beta^2 + 1 \Rightarrow \beta^2 + \beta + \alpha^2 + \alpha = 0$

Rezultă $\beta = \dfrac{-1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2 - 4\alpha}}{2}$ deci sistemul are in acest caz o infinitate de soluţii de forma:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \dfrac{-1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2 - 4\alpha}}{2} \end{cases} \quad \text{unde } 4\alpha^2 + 4\alpha - 1 \le 0$$

2.a) $a, b, c \in \mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$ deci a,b,c pot lua fiecare cate 4 valori.

In total se obţin $4^3 = 64$ matrice.

b)De exemplu

$A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \hat{2} \ne \hat{0}$

$\det A^2 = \det A \cdot \det A = \hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{0}$

c) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \hat{1} \\ b(a+c) = \hat{0} \\ c^2 = \hat{0} \end{cases}$

$a \in \{\hat{1}, \hat{3}\}$

$c \in \{\hat{0}, \hat{2}\}$ deci ecuaţia dată are 4 soluţii.

$b = \hat{0}$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=|\sin nx|$ şi numărul $I_n=\int_{\pi}^{2\pi}\dfrac{f_n(x)}{x}dx$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} f_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $I_n\le\ln 2$.

5p **c)** Să se arate că $I_n\ge\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}\right)$.

Soluţii

Subiectul III

1.a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^2+x+1\right)'}{(x+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{1}=+\infty$ deci graficul nu are asimptotă orizontală.

Căutăm asimptotă oblică de ecuaţie $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+x+1}{x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+x+1\right)'}{\left(x^2+x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{2x+1}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+x+1}{x+1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+x+1-x^2-x}{x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{+\infty}=0$$

Aşadar avem asimptotă oblică de ecuaţie $y=x$ spre $+\infty$ şi analog spre $-\infty$.

b) $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\right)'=\dfrac{(x^2+x+1)'\cdot(x+1)-(x^2+x+1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{(2x+1)\cdot(x+1)-(x^2+x+1)}{(x+1)^2}=$

$=\dfrac{2x^2+2x+x+1-x^2-x-1}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

c) $f''(x)=\left(\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}\right)'=\dfrac{(x^2+2x)'\cdot(x+1)^2-(x^2+2x)\cdot[(x+1)^2]'}{(x+1)^4}=\dfrac{(2x+2)\cdot(x+1)^2-(x^2+2x)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=$

$=\dfrac{(2x+2)\cdot(x+1)-2(x^2+2x)}{(x+1)^3}=\dfrac{2x^2+4x+2-2x^2-4x}{(x+1)^3}=\dfrac{2}{(x+1)^3}<0$ pe intervalul $(-\infty,-1)$ deci funcţia f este concavă pe acest interval.

2)a) $\int_0^{\pi} f_2(x)dx = \int_0^{\pi} |\sin 2x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos 2x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 2$.

b) $I_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin nx|}{x} dx \le \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{x} dx = \ln x\Big|_{\pi}^{2\pi} = \ln 2\pi - \ln \pi = \ln 2$.

c) $I_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin nx|}{x} dx$ .Facem schimbarea de variabilă $nx = t \quad \Rightarrow \quad (nx)'dx = t'dt \quad \Rightarrow \quad ndx = dt$.

Pentru $x = \pi \quad \Rightarrow t = n\pi$ iar pentru $x = 2\pi \quad \Rightarrow t = 2n\pi$ deci

$$I_n = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt + \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt + \int_{(n+2)\pi}^{(n+3)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt + ... + \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \ge \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt +$$

$$\frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt + \frac{1}{(n+2)\pi} \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} |\sin t| dt + ... + \frac{1}{2n\pi} \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} |\sin t| dt$$

Calculăm

$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = -\cos t\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi} = -\cos(k+1)\pi + \cos k\pi = 1+1 = 2$ pentru k număr par

şi

$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = \cos t\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi} = \cos(k+1)\pi - \cos k\pi = 1+1 = 2$ pentru k număr impar.

Obţinem $I_n \ge \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}\right)$ c.c.t.d

Examenul de bacalaureat 2009

Proba E - c)

Proba scrisă la matematică

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$	**2p**
	$z^6=2^6\cdot\left(\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}\right)=-2^6\Rightarrow \operatorname{Re} z^6=-64$	**3p**
2.	$f(512)=\frac{1}{8}$	**2p**
	$(f\circ f)(512)=f\left(\frac{1}{8}\right)=2$	**3p**
3.	Ecuația devine $2\sin^2 x-\sin x-1=0$, cu soluțiile $\sin x=-\frac{1}{2}$ și $\sin x=1$.	**3p**
	Obținem $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, sau $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.	**2p**
4.	Numărul cerut este egal cu numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii M	**3p**
	Acesta este $C_6^3=20$.	**2p**
5.	Punctul $A(0,3)$ se află pe prima dreaptă.	**2p**
	Distanța este $\mathrm{d}(A,d_2)=\frac{\lvert 2\cdot 0+4\cdot 3-11\rvert}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$.	**3p**
6.	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2$	**3p**
	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1\cdot 2\cdot\cos 60^\circ=1$	**1p**
	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1+2^2=5$	**1p**

SUBIECTUL al II - lea (30 de puncte)

1.a)	$\begin{vmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b+c & b & c\\ a+b+c & a & b\\ a+b+c & c & a\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c\\ 1 & a & b\\ 1 & c & a\end{vmatrix}$	**2p**

	$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$, de unde rezultă concluzia	3p
b)	Observăm că $x=0,\ y=1,\ z=0$ verifică sistemul. Cum soluția este unică, aceasta este soluția căutată.	3p 2p
c)	$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(c-b)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c$. Sistemul are o infinitate de soluții de forma $x=\alpha, y=\beta, z=1-\alpha-\beta$. Putem lua $\beta=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1-4\alpha^2-4\alpha})$, cu $4\alpha^2+4\alpha-1\le 0$.	2p 2p 1p
2.a)	a, b, c pot lua fiecare 4 valori Avem $4^3=64$ matrice.	3p 2p
b)	Luăm $A=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$ $\det(A)=\hat{2},\ \det(A^2)=\hat{0}$	3p 2p
c)	$X=\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \Rightarrow X^2=\begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ \hat{0} & c^2 \end{pmatrix}$ Ecuația devine $a^2=\hat{1},\ b(a+c)=\hat{0}, c^2=\hat{0}$. Obținem $a\in\{\hat{1},\hat{3}\}, c\in\{\hat{0},\hat{2}\}, b=\hat{0}$, deci există 4 soluții	2p 1p 2p

SUBIECTUL al III - lea (30 de puncte)

1.a)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1 \Rightarrow m=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=0$, deci avem asimptota oblică $y=x$.	2p 3p
b)	$f'(x)=\frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+1)}{(x+1)^2}$ $f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$	3p 2p
c)	$f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$ $f''(x)<0, \forall x\in(-\infty,-1)$, deci f este concavă pe $(-\infty,-1)$	3p 2p
2.a)	$\int_0^{\pi}\lvert\sin 2x\rvert dx=\int_0^{\pi/2}\sin 2x dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\sin 2x dx$ $I=\frac{-\cos 2x}{2}\Big\rvert_0^{\pi/2}+\frac{\cos 2x}{2}\Big\rvert_{\pi/2}^{\pi}$ $I=2$	2p 2p 1p
b)	$I_n=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{f_n(x)}{x}dx\le\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{x}dx$ $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{x}dx=\ln x\rvert_{\pi}^{2\pi}=\ln 2$	3p 2p
c)	$I_n=\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\lvert\sin t\rvert}{t}dt$	1p

	$I_n = \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{\lvert \sin t \rvert}{t} dt + \int_{n\pi+\pi}^{n\pi+2\pi} \frac{\lvert \sin t \rvert}{t} dt + \ldots + \int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi} \frac{\lvert \sin t \rvert}{t} dt$	**2p**
	$I_n \geq \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \lvert \sin t \rvert dt + \frac{1}{\pi(n+2)} \int_{n\pi+\pi}^{n\pi+2\pi} \lvert \sin t \rvert dt + \ldots + \frac{1}{2n\pi} \int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi} \lvert \sin t \rvert dt$	**1p**
	Din $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \lvert \sin t \rvert dt = 2, \forall k \in \mathbb{Z}$ rezultă concluzia.	**1p**