Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, specializarea toate calificările profesionale; profilul resurse, specializarea toate calificările profesionale; profilul tehnic, specializarea toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $2\log_3 4 - 4\log_3 2$.

5p **2.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $2^{x-1} + 2^x = 12$.

5p **3.** Să se determine numărul natural n, $n \geq 1$ ştiind că $A_n^1 + C_n^1 = 10$.

5p **4.** Fie funcția $f:[0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 3$. Să se determine mulțimea valorilor funcției f.

5p **5.** Se consideră triunghiul echilateral ABC înscris într-un cerc de centru O. Să se arate că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{O}$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 135°$.

Soluţii

Subiectul I

1. $2\log_3 4 - 4\log_3 2 = \log_3 4^2 - \log_3 2^4 = 0$

2. $\frac{2^x}{2} + 2^x = 12$ .Notăm $2^x = t$ şi rezultă $\frac{t}{2} + t = 12 \Rightarrow 3t = 24 \Rightarrow t = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$.

3. $A_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!} = n$ şi $C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$.

n+n=10 deci n=5

4. $\left.\begin{array}{l} f(0) = 3 \\ f(2) = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow Imf = [-5,3]$

5.Fie M mijlocul segmentului BC.

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AO}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$

6. $\sin 135^0 = \sin(180^0 - 45^0) = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $F=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine numerele a, b şi c astfel încât $A+F=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&2&5\\0&0&2\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se arate că pentru $a=c=0$ şi $b=-1$ matricea A este inversa matricei F.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $F\cdot X=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, unde $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=2xy-x-y+1$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=xy+(1-x)(1-y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x*(1-x)=0$.

Soluţii

Subiectul II

1.a) $A+F=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&a&b+1\\0&2&c\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&2&5\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b+1=4\\c=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=3\\c=5\end{cases}$

b)Pentru a=0,c=0,b=-1 avem $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

$A\cdot F=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$

$F\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$ deci A este inversa matricei F.

c)Matricea F este inversabilă şi putem inmulţi egalitatea din enunţ la stanga cu F^{-1}.

$\Rightarrow F^{-1}(F\cdot X)=F^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-6&-6\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$.

2.a) $xy+(1-x)(1-y)=xy+1-y-x+xy=2xy-x-y+1$

b) $(x*y)*z=x*(y*z),\forall x,y,z\in\square$

$(x*y)*z=(2xy-x-y+1)*z=2(2xy-x-y+1)z-(2xy-x-y+1)-z+1=$

$=4xyz-2xz-2yz+2z-2xy+x+y-1-z+1=4xyz-2xz-2xy-2yz+x+y+z$

$x*(y*z)=x*(2yz-y-z+1)=2x(2yz-y-z+1)-x-(2yz-y-z+1)+1=$

$$= 4xyz - 2xy - 2xz + 2x - x - 2yz + y + z - 1 + 1 = 4xyz - 2xy - 2xz - 2yz + x + y + z$$

şi de aici rezultă asociativitatea.

c) $x * (1-x) = 2x(1-x) - x - (1-x) + 1 = 2x - 2x^2 - x - 1 + x + 1 = -2x^2 + 2x = 0$

$\Rightarrow x(-2x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x) = \dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Ştiind că $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, să se determine

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) + g\left(x^2\right) + g\left(x^3\right) + \ldots + g\left(x^{2009}\right) + x^{2010}}{x^{2009}}.$$

2. Se consideră $I_n = \displaystyle\int_e^{e^2} x \ln^n x \, dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

5p **a)** Să se calculeze I_0.

5p **b)** Să se arate că $I_n \le I_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

5p **c)** Să se demonstreze că are loc relația $I_n = \dfrac{e^2\left(e^2 \cdot 2^n - 1\right)}{2} - \dfrac{n}{2} I_{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţii

<u>Subiectul III</u>

1.a)

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

b) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Tabelul de variaţie al funcţiei este:

x		0	
f'(x)	- - - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + +
f(x)	↘		↗

Pe intervalul $(-\infty, 0]$ funcţia este descrescătoare;

Pe intervalul $[0, +\infty)$ funcţia este crescătoare;

c) $g(x^k)=f(x^k)+f\left(\frac{1}{x^k}\right)=\frac{x^{2k}-1}{x^{2k}+1}+\frac{\frac{1}{x^{2k}}-1}{\frac{1}{x^{2k}}+1}=\frac{x^{2k}-1}{x^{2k}+1}+\frac{1-x^{2k}}{1+x^{2k}}=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)+g(x^2)+g(x^3)+...+g(x^{2009})+x^{2010}}{x^{2009}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2010}}{x^{2009}}=\lim_{x\to 0}x=0.$$

2.a) $I_0=\int_e^{e^2}xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_e^{e^2}=\frac{e^4-e^2}{2}=\frac{e^2(e^2-1)}{2}$

b) $x\in\left[e,e^2\right]\Rightarrow 1\le\ln x\le 2\Rightarrow\ln^n x\le\ln^{n+1}x,\forall n\in\square$

$\Rightarrow x\ln^n x\le x\ln^{n+1}x$

Integrand pe intervalul $\left[e,e^2\right]$ se obţine inegalitatea cerută.

c) $I_n=\int_e^{e^2}x\ln^n xdx=\int_e^{e^2}\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln^n xdx=\left.\left(\frac{x^2}{2}\right)\ln^n x\right|_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\left(\frac{x^2}{2}\right)(\ln^n x)'dx=\frac{e^4}{2}2^n-\frac{e^2}{2}-\int_e^{e^2}\left(\frac{x^2}{2}\right)n\ln^{n-1}x\cdot\frac{1}{x}dx=$

$=\frac{e^2(e^2 2^n-1)}{2}-\frac{n}{2}\int_e^{e^2}x\ln^{n-1}xdx=\frac{e^2(e^2 2^n-1)}{2}-\frac{n}{2}\cdot I_{n-1},\forall n\in\square^*$.

Examenul de bacalaureat 2009
Proba D_MT2
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, specializarea toate calificările profesionale; profilul resurse, specializarea toate calificările profesionale; profilul tehnic, specializarea toate calificările profesionale.

BAREM DE CORECTARE ŞI DE NOTARE
Subiecte 2009

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I — 30 de puncte

1.	$\log_3 4 = \log_3 2^2 = 2\log_3 2$ $2\log_3 4 - 4\log_3 2 = 4\log_3 2 - 4\log_3 2 = 0.$	**3p** **2p**
2.	Ecuația se scrie $\frac{2^x}{2} + 2^x = 12 \Rightarrow 2^x = 8$ $\Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$	**3p** **2p**
3.	$A_n^1 = n$ $C_n^1 = n$ $2n = 10 \Rightarrow n = 5$	**1p** **1p** **3p**
4.	Funcția f este descrescătoare pe $[0,2]$ $f(0) = 3,\ f(2) = -5$ $\operatorname{Im} f = [-5,3]$	**1p** **2p** **2p**
5.	Fie D mijlocul segmentului BC, atunci $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO}$. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} = \vec{0}$.	**3p** **2p**
6.	$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ$ $= \frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea — 30 de puncte

1.a)	$A + F = \begin{pmatrix} 2 & a & b+1 \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Se obțin ecuațiile $\begin{cases} a = 3 \\ b+1 = 4 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 5 \end{cases}$	**2p** **3p**
b)	$\det F = 1 \neq 0$, deci F este inversabilă $F^{-1} = F^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	**2p** **3p**

c)	F este inversabilă $\Rightarrow X = F^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}-6&-6&-6\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$x*y=xy+xy-x-y+1$	**2p**
	$=xy+(1-x)(1-y)$	**3p**
b)	$x*(y*z)=4xyz-2xy-2xz-2yz+x+y+z$	**2p**
	$(x*y)*z=4xyz-2xy-2xz-2yz+x+y+z$	**2p**
	Concluzie	**1p**
c)	$x*(1-x)=0\Leftrightarrow 2x(1-x)=0$	**3p**
	$\Leftrightarrow x\in\{0,1\}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **30 de puncte**

1.a)	$f'(x)=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)'=\dfrac{2x\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2},\quad \forall x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f'(x)=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2},\forall x\in\mathbb{R}\ ;f'(x)=0\Rightarrow x=0$	**2p**
	Din tabelul de variație al funcției obținem că f este crescătoare pentru $x\in[0;\infty)$ și descrescătoare pe $(-\infty;0]$	**3p**
c)	$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}+\dfrac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}=0,\ \forall x\in\mathbb{R}^*$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)+g\left(x^2\right)+g\left(x^3\right)+\ldots+g\left(x^{2009}\right)+x^{2010}}{x^{2009}}=$	**1p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overbrace{0+0+\ldots+0}^{de\,2009\,ori}+x^{2010}}{x^{2009}}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$	**1p**
2.a)	$I_0=\int\limits_e^{e^2}x\,dx=$	**2p**
	$=\dfrac{e^4-e^2}{2}$	**3p**
b)	$x\in\left[e,e^2\right]\Rightarrow 1\le\ln x\le 2\Rightarrow x\cdot\ln^n x\le x\cdot\ln^{n+1}x$.	**3p**
	Integrând obținem $I_n\le I_{n+1}$	**2p**

c)	$I_n = \int_e^{e^2} x \cdot \ln^n x\, dx = \int_e^{e^2} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot \ln^n x\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^n x \Big\|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x^2}{2} \cdot \left(\ln^n x\right)' dx =$	**2p**
	$= \frac{e^4 \cdot 2^n}{2} - \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} \int_e^{e^2} x \cdot \ln^{n-1} x\, dx =$	**2p**
	$= \frac{e^2\left(e^2 \cdot 2^n - 1\right)}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$	**1p**