Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, specializarea toate calificările profesionale; profilul resurse, specializarea toate calificările profesionale; profilul tehnic, specializarea toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 3$ şi $a_3 = 7$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.

5p **2.** Să se determine numerele reale m pentru care punctul $A(m,-1)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(2x+3)=2$.

5p **4.** Să se determine numărul submulţimilor cu 3 elemente ale unei mulţimi care are 5 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(1,2)$ şi $C(2,-1)$. Să se calculeze distanţa de la punctul C la mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=8$, $AC=8$ şi $m(\sphericalangle BAC)=30^\circ$. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

Soluţii

Subiectul I

1. Din formula termenului general avem $a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow 7 = 3 + 2r \Rightarrow r = 2$

$a_{10} = a_1 + 9r = 3 + 9\cdot 2 = 21$

$S_{10} = \dfrac{10(a_1+a_{10})}{2} = 5(3+21) = 120$.

2. Punem condiţia $f(m) = -1$.

$\Rightarrow m^2 - 3m + 1 = -1 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0$ care are soluţiile m=1 şi m=2.

3. Condiţia de existenţă este $2x+3>0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{3}{2}$.

Ecuaţia dată este echivalentă cu $2x+3=5^2 \Leftrightarrow 2x = 22 \Leftrightarrow x = 11 \in \left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

4. $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$

5. Mijlocul segmentului AB este O(0,0).

$OC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \Rightarrow \quad OC = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$.

6. $Aria_{(\Delta ABC)} = \dfrac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2} = \dfrac{8\cdot 8\cdot \sin 30^o}{2} = \dfrac{64\cdot \frac{1}{2}}{2} = 16$

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi funcţia $f:\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X)=X^2-3X+I_3$, unde $X^2=X\cdot X$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(I_3+B)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $f(A)=I_3+B$.

5p **c)** Să se arate că $(f(A))^3=I_3+3B+3B^2$, unde $(f(A))^3=f(A)\cdot f(A)\cdot f(A)$.

2. Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x\circ x=x*x$.

5p **b)** Să se determine numărul întreg a care are proprietatea că $x\circ a=3$, oricare ar fi numărul întreg x.

5p **c)** Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x*(y+1)=4\\(x-y)\circ 1=5\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

Soluţii

Subiectul II

1.a) $I_3+B=\begin{pmatrix}1&3&4\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(I_3+B)=\begin{vmatrix}1&3&4\\0&1&3\\0&0&1\end{vmatrix}=1$.

b)

$$f(A)=A^2-3A+I_3=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1&1\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3&1&1\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&6&7\\0&9&6\\0&0&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9&3&3\\0&9&3\\0&0&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&3&4\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3+B.$$

c) $(f(A))^3=(I_3+B)^3=I_3^3+3I_3^2B+3I_3B^2+B^3=I_3+3B+3B^2+B^3$

$B^2=\begin{pmatrix}0&3&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&9\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi $B^3=O_3$ de unde rezultă concluzia.

2.a) $x\circ x=x*x\Rightarrow(x-3)^2+3=2x-3\Rightarrow x^2-8x+15=0$ care are soluţiile $x_1=3$ şi $x_2=5$.

b) $x\circ a=3,\forall x\in\square\Leftrightarrow$

$(x-3)(a-3)+3=3,\forall x\in\square\Leftrightarrow$

$(x-3)(a-3)=0,\forall x\in\square\Rightarrow a=3\in\square$

c) $\begin{cases}x*(y+1)=4\\(x-y)\circ 1=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=6\\(x-y-3)(-2)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=6\\-2x+2y=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=6\\-x+y=-2\end{cases}$ care are soluţiile intregi x=4 şi y=2.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}^*$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **c)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

Soluţii

Subiectul III

1.a) $f'(x)=\left(x^3+\frac{3}{x}\right)'=3x^2-\frac{3}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3-3=0$

c) $f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-\frac{3}{x^2}=0\Rightarrow x^4=1\Rightarrow x=\pm 1$

Tabelul de variaţie al funcţiei este:

x		-1		0		1	
f'(x)	+ + + +	0	- - - - -	|	- - - - - -	0	+ + + + +
f(x)	↗	-4	↘	|	↘	4	↗

Funcţia este crescătoare pe intervalele $(-\infty,-1)$ şi $(1,+\infty)$ şi este descrescătoare pe intervalele (-1,0) şi (0,1).

2.a) $V(C_f)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1 x^2(2-x^2)dx=\pi\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{7\pi}{15}$

b) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(-2x\cdot(2-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(t)dt\right)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(F(x)-F(0)\right)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{2-x^2}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-x^2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

unde cu F s-a notat o primitivă a funcţiei f.

Examenul de bacalaureat 2009
Proba E - c)
Proba scrisă la matematică

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases}$ $a_{10} = 21$ $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 120$	**2p** **1p** **2p**
2.	$A(m,-1) \in G_f \Leftrightarrow f(m) = -1 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 1 = -1$ $m = 2$ sau $m = 1$	**3p** **2p**
3.	$2x + 3 > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ $2x + 3 = 25 \Rightarrow x = 11 \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$	**1p** **4p**
4.	$C_5^3 =$ $= 10$	**3p** **2p**
5.	Fie M mijlocul segmentului $AB \Rightarrow M(0,0)$ Scrierea formulei distanței dintre 2 puncte $CM = \sqrt{5}$	**2p** **1p** **2p**
6.	Aria $\Delta ABC = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} =$ $= \frac{8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 16$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II - lea **(30 de puncte)**

1.a)	$I_3 + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(I_3 + B) = 1$	**2p** **3p**

b)	$A^2=\begin{pmatrix}9&6&7\\0&9&6\\0&0&9\end{pmatrix}$	**2p**
	$f(A)=A^2-3A+I_3=$	**1p**
	$=I_3+B$	**2p**
c)	$(f(A))^3=(I_3+B)^3=I_3+3B+3B^2+B^3$	**2p**
	$B^3=O_3$	**2p**
	Finalizare	**1p**
2.a)	$(x-3)^2-2(x-3)=0$	**2p**
	$(x-3)(x-5)=0$	**1p**
	$x=3$ sau $x=5$	**2p**
b)	$(x-3)(a-3)+3=3$	**2p**
	$a=3\in\mathbf{Z}$	**3p**
c)	$\begin{cases}x+y=6\\(x-y-3)(-2)=2\end{cases}$	**3p**
	$\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$	**2p**

SUBIECTUL al III - lea **(30 de puncte)**

1.a)	$(x^3)'=3x^2$	**2p**
	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	**2p**
	Finalizare	**1p**
b)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$	**3p**
	$f'(1)=0$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x_1=1, x_2=-1$	**1p**
	Din tabelul de variație rezultă f crescătoare pe $(-\infty,-1]$ și pe $[1;+\infty)$	**2p**
	și f descrescătoare pe $[-1;0)$ și pe $(0;1]$	**2p**
2.a)	$V=\pi\int_0^1 f^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 x^2(2-x^2)\,dx=$	**1p**
	$=\pi\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big\vert_0^1=$	**2p**
	$=\frac{7\pi}{15}$.	**2p**
b)	$\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_2^1\sqrt{t}\,dt=$	**3p**

	$=\frac{t\sqrt{t}}{3}\Big\vert_1^2=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$	**2p**
c)	$\int_0^x f(t)\,dt=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}{3}$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}{3}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2-x^2}}{3}\cdot(-2x)}{2x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**