EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la matematică - Proba E c)

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați $\log_2 \frac{1}{8} + \sqrt[3]{27}$.
5p	**2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x+3$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2-3^{x^2-1}=1$.
5p	**4.** Determinați câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4\}$.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\vec{v_1}=2\vec{i}-\vec{j}$ şi $\vec{v_2}=\vec{i}+3\vec{j}$. Determinați coordonatele vectorului $\vec{w}=2\vec{v_1}-\vec{v_2}$.
5p	**6.** Un triunghi dreptunghic are catetele $AB=3,\ AC=4$. Determinați lungimea înălțimii duse din A.

Soluții

Subiectul 1

1. $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$

$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

$\log_2 \frac{1}{8} + \sqrt[3]{27} = -3+3 = 0$

2. Varful parabolei este $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4-12 = -8$

$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-8}{4} = 2$

Deci $V(1,2)$.

3. Ecuația dată este echivalentă cu $3^{x^2-1}=1 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1$ care are soluțiile $x\in\{-1,1\}$.

4. $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$.

5. $\vec{w} = 2\vec{v_1} - \vec{v_2} = 2(2\vec{i}-\vec{j}) - (\vec{i}+3\vec{j}) = \vec{3i} - 5\vec{j} \Rightarrow \vec{w}(3,-5)$

6. $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9+16 = 25 \Rightarrow BC = 5$

$h = \frac{AB\cdot AC}{BC} = \frac{12}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați A^2-A.

5p **b)** Determinați inversa matricei A.

5p **c)** Rezolvați ecuația $A\cdot X=\begin{pmatrix}2010 & 2010\\ 2009 & 2010\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_3[X]$, $f=X^2+X$, $g=X^2+\hat{2}X+a$, cu $a\in\mathbb{Z}_3$.

5p **a)** Calculați $f(\hat{0})+f(\hat{1})$.

5p **b)** Determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Demonstrați că $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})=g(\hat{0})+g(\hat{1})+g(\hat{2})$, pentru oricare $a\in\mathbb{Z}_3$.

Soluţii

Subiectul 2

1.a) $A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$A^2-A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$

b) $\det A=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0$ deci există A^{-1}.

$A^t=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$A^*=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A^*=-1\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

c) Inmulţim ecuaţia dată la stanga cu A^{-1}.

$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2010 & 2010\\ 2009 & 2010\end{pmatrix}$

$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2010 & 2010\\ 2009 & 2010\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2009 & 2010\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

2.a) $f(\hat{0})=\hat{0}^2+\hat{0}=\hat{0}$

$f(\hat{1})=\hat{1}^2+\hat{1}=\hat{2}$

$\Rightarrow f(\hat{0})+f(\hat{1})=\hat{0}+\hat{2}=\hat{2}$

b) $f(\hat{0})=\hat{0}$

$f(\hat{1})=\hat{2}$

$f(\hat{2}) = \hat{2}^2 + \hat{2} = \hat{0}$

Deci polinomul f are rădăcinile $x_1 = \hat{0}$ şi $x_2 = \hat{2}$.

c) $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{2}$

$$\left.\begin{array}{l} g(\hat{0}) = a \\ g(\hat{1}) = a \\ g(\hat{2}) = a + \hat{2} \end{array}\right\} \Rightarrow g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2}) = a + a + a + \hat{2} = \hat{2}$$

Din cele două egalităţi de mai sus obţinem că $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2}), \forall a \in \mathbb{Z}_3$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 \cdot e^x$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[-2,0]$.

5p **c)** Demonstrați că $0 \le f(x) + f(x^2) \le \dfrac{e^2+1}{e}$, oricare ar fi $x \in [-1,0]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

5p **a)** Calculați $\displaystyle\int_1^3 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right)dx$.

5p **b)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x) = f(x)$.

5p **c)** Calculați $\displaystyle\int_1^e f(x)\cdot \ln x\, dx$.

Soluţii

Subiectul 3

1.a) $f'(x) = (x^2e^x)' = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x$

b) $f'(x) = 0 \Rightarrow (2x + x^2)e^x = 0$ care are soluţiile $x_1 = -2$ şi $x_2 = 0$

Tabelul de variaţie al funcţiei este:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + +	0	– – – –	0	+ + + +		
$f(x)$		↗		↘		↗	

Din tabel rezultă că funcţia este descrescătoare pe intervalul $[-2,0]$.

c) Din punctul b) deducem că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $[-1,0]$ deci avem

$-1 \le x \le 0 \Rightarrow f(-1) \ge f(x) \ge f(0) \Rightarrow 0 \le f(x) \le \dfrac{1}{e}, \forall x \in [-1,0]$.

Dacă $x \in [-1,0]$ atunci $x^2 \in [0,1]$. Funcţia f este crescătoare pe intervalul $[0,1]$ deci avem:

$0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow f(0) \le f(x^2) \le f(1) \Rightarrow 0 \le f(x^2) \le e, \forall x \in [-1,0]$.

Prin adunarea celor două relaţii de mai sus obţinem că $0 \le f(x) + f(x^2) \le e + \frac{1}{e}, \forall x \in [-1,0]$ adică

$0 \le f(x) + f(x^2) \le \frac{e^2+1}{e}, \forall x \in [-1,0]$.

2.a) $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^3 \left(x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^3 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$.

b) $V(C_f) = \pi \int_1^2 g^2(x) dx = \pi \int_1^2 f^2(x) dx = \pi \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 dx = \pi \int_1^2 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \right) dx =$

$= \pi \left. \left(\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} \right) \right|_1^2 = \pi \left(\frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 2 + 1 \right) = \pi \left(\frac{14}{6} - \frac{3}{6} + \frac{18}{6} \right) = \frac{29\pi}{6}$.

c) $\int_1^e f(x) \cdot \ln x dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} \right) \cdot \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx + \int_1^e (\ln x)' \cdot \ln x dx =$

$= \left. \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \right|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot (\ln x)' dx + \left. \frac{\ln^2 x}{2} \right|_1^e = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} - \left. \frac{x^2}{4} \right|_1^e + \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{e^2+3}{4}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$	2p
	$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$	2p
	$\log_2 \frac{1}{8} + \sqrt[3]{27} = 0$	1p
2.	$x_V = -\frac{b}{2a} = 1$	2p
	$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = 2$	2p
	$V(1,2)$	1p
3.	$3^{x^2-1} = 1$	1p
	$x^2 - 1 = 0$	2p
	$x \in \{-1,1\}$	2p
4.	$A_4^3 =$	2p
	$= 24$	3p
5.	$\vec{w} = 2(2\vec{i} - \vec{j}) - (\vec{i} + 3\vec{j}) =$	2p
	$= 3\vec{i} - 5\vec{j} \Rightarrow \vec{w}(3,-5)$	3p
6.	$BC = 5$	2p
	$h = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12}{5}$	3p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	3p
	$A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2p
b)	$\det(A) = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$	1p
	$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	2p
	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	2p

c)	Prin înmulțire la stânga cu A^{-1} se obține	
	$X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2010 & 2010\\ 2009 & 2010\end{pmatrix}=$	2p
	$=\begin{pmatrix}2009 & 2010\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	2p 1p
2.a)	$f\left(\hat{0}\right)=\hat{0}$	2p
	$f\left(\hat{1}\right)=\hat{2}$	2p
	$f\left(\hat{0}\right)+f\left(\hat{1}\right)=\hat{2}$	1p
b)	$f\left(\hat{0}\right)=\hat{0}, f\left(\hat{1}\right)=\hat{2}, f\left(\hat{2}\right)=\hat{0}$	3p
	Rădăcinile lui f sunt $\hat{0}$ și $\hat{2}$	2p
c)	$g\left(\hat{0}\right)=a, g\left(\hat{1}\right)=a, g\left(\hat{2}\right)=\hat{2}+a$	2p
	$g\left(\hat{0}\right)+g\left(\hat{1}\right)+g\left(\hat{2}\right)=a+a+\hat{2}+a=\hat{2}$	2p
	$f\left(\hat{0}\right)+f\left(\hat{1}\right)+f\left(\hat{2}\right)=g\left(\hat{0}\right)+g\left(\hat{1}\right)+g\left(\hat{2}\right)=\hat{2}, \forall a\in\mathbb{Z}_3$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^2e^x\right)'=$	2p
	$=2xe^x+x^2e^x=\left(2x+x^2\right)e^x$	3p
b)	$f'(x)\le 0, \forall x\in[-2,0]$	2p
	f descrescătoare pe $[-2,0]$	3p
c)	f descrescătoare pe $[-1,0]\Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(-1)$	1p
	f crescătoare pe $[0,1]$ și $x^2\in[0,1]\Rightarrow f(0)\le f\left(x^2\right)\le f(1)$	2p
	Prin adunarea celor 2 relații se obține $0\le f(x)+f\left(x^2\right)\le\frac{e^2+1}{e}, \forall x\in[-1,0]$	2p
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^3 xdx=$	2p
	$=\left.\frac{x^2}{2}\right\|_1^3=$	2p
	$=4$	1p
b)	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=$	1p
	$=\pi\int_1^2\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx=$	1p
	$=\pi\left.\left(\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}\right)\right\|_1^2=$	2p
	$=\frac{29\pi}{6}$	1p

c)	$\int_1^e f(x)\cdot \ln x dx = \int_1^e x\cdot \ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x}\cdot \ln x dx =$	1p
	$= \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Big\|_1^e + \frac{\ln^2 x}{2}\Big\|_1^e =$	2p
	$= \frac{e^2+3}{4}$	2p