Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Centrul Național de Evaluare şi Examinare

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la MATEMATICĂ – Proba E c)

Varianta 9

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați $\log_2\sqrt{6}-\log_2\sqrt{3}$.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-5$. Calculați $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(10)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1}-2^{x+1}=24$.

5p **4.** Calculați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $A=\{x\in\mathbb{N}\mid x\le 8\}$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(3,4)$ şi $B(2,m)$. Ştiind că B aparține dreptei de ecuație $y=3x+20$ determinați coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$.

5p **6.** Calculați valoarea expresiei $E(x)=\cos x+\sin 2x$ pentru $x=30^\circ$.

Soluții

Subiectul 1

1. $\log_2\sqrt{6}-\log_2\sqrt{3}=\log_2\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$.

2. In produsul cerut intră şi factorul $f(5)=0$ deci tot produsul este 0.

3. Ecuația dată se mai scrie $(2^x)^2\cdot 2-2^x\cdot 2=24$. Notăm $2^x=y$ şi obținem ecuația de gradul doi $2y^2-2y-24=0\Leftrightarrow y^2-y-12=0$ care are soluțiile $y_1=4$ şi $y_2=-3$.

Revenind la notația făcută obținem o singură soluție şi anume $x=2$.

4. Mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ are 9 elemente.

Numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii A este $C_9^2=\frac{9!}{2!(9-2)!}=\frac{9!}{2!\cdot 7!}=\frac{8\cdot 9}{2}=36$.

5. Punem condiția ca punctul B să aparțină dreptei date şi avem:

$m=3\cdot 2+20=26$ deci $B(2,26)$.

Mijlocul segmentului AB este $M\left(\frac{3+2}{2},\frac{4+26}{2}\right)\Leftrightarrow M\left(\frac{5}{2},15\right)$.

6. $E(30^0)=\cos 30^0+\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulțimea $M=\left\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}\subset\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y+\sqrt{2}$.

5p **a)** Arătați că $x+y\in M$, oricare ar fi $x,y\in M$.

5p **b)** Arătați că $x\cdot y\in M$, oricare ar fi $x,y\in M$.

5p **c)** Determinați $x\in M$ cu proprietatea că $x\cdot(1+\sqrt{2})^2=1$.

5p **d)** Verificați dacă $\frac{1}{1+\sqrt{2}}\circ\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\in M$.

5p **e)** Arătați că legea „$\circ$” este asociativă pe mulțimea M.

5p **f)** Arătați că legea „$\circ$” determină pe mulțimea M o structură de grup.

Soluții

Subiectul 2

a) Fie $x=a+b\sqrt{2}\in M$, $y=c+d\sqrt{2}\in M$

$x+y=a+b\sqrt{2}+c+d\sqrt{2}=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}\in M$

rezultă că $x+y\in M$.

b) Fie $x=a+b\sqrt{2}\in M$, $y=c+d\sqrt{2}\in M$

$x\cdot y=(a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2})=ac+2bd+(ad+bc)\sqrt{2}\in M$

rezultă că $x\cdot y\in M$.

c) $x=\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{1}=3-2\sqrt{2}\in M$

d) $x\circ y=\frac{1}{1+\sqrt{2}}\circ\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{2}=\sqrt{2}-1+3-2\sqrt{2}+\sqrt{2}=2=2+0\sqrt{2}\in M$.

e) $(x\circ y)\circ z=(x+y+\sqrt{2})\circ z=x+y+\sqrt{2}+z+\sqrt{2}=x+y+z+2\sqrt{2}$

$x\circ(y\circ z)=x\circ(y+z+\sqrt{2})=x+y+z+\sqrt{2}+\sqrt{2}=x+y+z+2\sqrt{2}$

$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\forall x,y,z\in M$

f) Asociativitatea

Legea $\circ$ este asociativă conform punctului e)

Element neutru

$x\circ e=e\circ x=x,\forall x\in M$

$\Rightarrow x+e+\sqrt{2}=x,\forall x\in M$

$\Rightarrow e=-\sqrt{2}$

Deci legea $\circ$ are element neutru.

Elemente simetrizabile

$\forall x\in M,\exists x'\in M,x\circ x'=x'\circ x=e$

$x+x'+\sqrt{2}=-\sqrt{2}$

$\Rightarrow x'=-x-2\sqrt{2}\in M$

In concluzie perechea $(M,\circ)$ formează o structură algebrică de grup.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Fie matricele $M=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=M+aI_2$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătaţi că $M^2=M$.

5p **b)** Determinaţi matricea $A(2010)$.

5p **c)** Determinaţi $a\in\mathbb{R}$, pentru care $\det(A(a))=2$.

5p **d)** Arătaţi că $A^{-1}(1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

5p **e)** Arătaţi că pentru oricare $a\in\mathbb{Z}$ matricea $A(a)+\left(A(a)\right)^t$ este inversabilă, unde $\left(A(a)\right)^t$ este transpusa matricei $A(a)$.

5p **f)** Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matricială $X\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}$.

Soluţii

Subiectul 3

a) $M^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=M$.

b) $A(2010)=M+2010\cdot I_2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2010 & 0\\ 0 & 2010\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2012 & 2\\ -1 & 2009\end{pmatrix}$.

c) $A(a)=M+a\cdot I_2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+a & 2\\ -1 & a-1\end{pmatrix}$

$\det A(a)=\begin{vmatrix}2+a & 2\\ -1 & a-1\end{vmatrix}=(2+a)(a-1)+2=a^2+a$

Se obţine ecuaţia $a^2+a=2\Leftrightarrow a^2+a-2=0$ care are soluţiile $a_1=1$ şi $a_2=-2$.

Celelalte rezolvări vor fi afişate pe măsură ce vor fi redactate.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 9

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\sqrt{6}-\log_2\sqrt{3}=\log_2\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=$	**2p**
	$=\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$	**3p**
2.	$f(5)=0$	**3p**
	$f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(10)=0$	**2p**
3.	$2^x=y\Rightarrow y^2-y-12=0$	**2p**
	$y_1=-3,\ y_2=4$	**2p**
	$x=2$	**1p**
4.	$Card\ A=9$	**2p**
	Numărul submulțimilor cu două elemente este C_9^2	**1p**
	$C_9^2=36$	**2p**
5.	$m=6+20\Rightarrow m=26$	**2p**
	Mijlocul lui $[AB]$ este $M\left(\frac{5}{2},15\right)$	**3p**
6.	$E(30^\circ)=\cos 30^\circ+\sin 60^\circ=$	**2p**
	$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

a.	Fie $x,y\in M, x=a+b\sqrt{2}, y=c+d\sqrt{2}$	**2p**
	$x+y=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}\Rightarrow x+y\in M$	**3p**
b.	Fie $x,y\in M, x=a+b\sqrt{2}, y=c+d\sqrt{2}$	**1p**
	$x\cdot y=ac+ad\sqrt{2}+bc\sqrt{2}+2bd$	**2p**
	$x\cdot y=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\Rightarrow x\cdot y\in M$	**2p**
c.	$(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$	**2p**
	$x\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right)=1\Rightarrow x=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}\in M$	**3p**
d.	$\frac{1}{1+\sqrt{2}}\circ\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{2}$	**2p**
	$\frac{1}{1+\sqrt{2}}=-1+\sqrt{2},\quad \frac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$	**2p**
	$\frac{1}{1+\sqrt{2}}\circ\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=2+0\cdot\sqrt{2}\in M$	**1p**

e.	$(x \circ y) \circ z = x + y + z + 2\sqrt{2}$ $x \circ (y \circ z) = x + y + z + 2\sqrt{2}$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
f.	Asociativitatea din e) Element neutru $e = -\sqrt{2} \in M$ Simetricul lui $x \in M$ este $x' = -x - 2\sqrt{2} \in M$	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

a.	$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 4-2 & 4-2 \\ -2+1 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	**1p** **4p**
b.	$A(2010) = M + 2010 I_2$ $A(2010) = \begin{pmatrix} 2012 & 2 \\ -1 & 2009 \end{pmatrix}$	**2p** **3p**
c.	$A(a) = \begin{pmatrix} a+2 & 2 \\ -1 & a-1 \end{pmatrix}$ $\det(A(a)) = a^2 + a$ $a \in \{1, -2\}$	**2p** **2p** **1p**
d.	$A^{-1}(1) \cdot A(1) = A(1) \cdot A^{-1}(1) = I_2$ Verificare	**2p** **3p**
e.	$A(a) + (A(a))^t = \begin{pmatrix} 2a+4 & 1 \\ 1 & 2a-2 \end{pmatrix}$ $\det(A(a) + (A(a))^t) = 4a^2 + 4a - 9$ $4a^2 + 4a - 9 = \text{impar} \neq 0, \forall a \in \mathbb{Z}$	**2p** **2p** **1p**
f.	$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot (A(1))^{-1}$ $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$	**2p** **3p**