Ministerul Educației și Cercetării
Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_pedagogic***

**Model**

***Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| **5p** | **1.** Arătați că $\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)=3$. |
| **5p** | **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$. Determinați numerele naturale $n$ pentru care $f(n)<0$. |
| **5p** | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-1\right)=1$. |
| **5p** | **4.** După o scumpire cu $20\%$, prețul unui obiect este $660$ de lei. Determinați prețul obiectului înainte de scumpire. |
| **5p** | **5.** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $M(2,0)$ și este paralelă cu dreapta $d$ de ecuație $y=3x$. |
| **5p** | **6.** Calculați aria rombului $ABCD$, știind că $AC=2\sqrt{5}$ și $BD=4$. |



**<u>Soluții</u>**

**<u>Subiectul1</u>**

**1.** $\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2}=3$

**2.** $f(n)<0\Leftrightarrow n-2<0\Leftrightarrow n<2$ și cum n este număr natural rezultă $n\in\{0,1\}$.

**3.** $\log_3\left(x^2-1\right)=1\Leftrightarrow x^2-1=3\Leftrightarrow x^2=4$ cu soluțiile $x_1=2$ și $x_2=-2$ care convin.

**4. Metoda 1**

Notăm cu x prețul inițial al obiectului.

$$x+\frac{20}{100}x=660\Leftrightarrow x+\frac{x}{5}=660\Leftrightarrow\frac{6x}{5}=660\Leftrightarrow 6x=660\cdot5$$

$$x=\frac{660\cdot5}{6}\Leftrightarrow x=110\cdot5\Leftrightarrow x=550$$

**Metoda 2**

Notăm cu x prețul inițial al obiectului.

x....................100%

660................120%

Rezultă $x=\frac{660\cdot100}{120}=\frac{660\cdot10}{12}=\frac{6600}{12}=550$

**5.** Panta dreptei $d$ de ecuație $y=3x$ este $m=3$ (coeficientul lui x din forma $y=mx+n$)

Două drepte sunt paralele dacă și numai dacă au aceeași pantă.

Fie $d'$ dreapta care trece prin punctul $M(2,0)$ şî este paralelă cu dreapta $d$.

$m_{d'}=3$

Ecuația dreptei care trece printr-un punct dat și are panta dată este $y-y_0=m(x-x_0)$

$d':y-0=3(x-2)$

$d':y=3x-6$

**6.** $Aria_{ABCD}=\dfrac{AC\cdot BD}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}\cdot 4}{2}=4\sqrt{5}$

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=3xy+7(x+y)+14$. |
| **5p** | **1.** Arătaţi că $(-3)*3=-13$. |
| **5p** | **2.** Demonstraţi că legea de compoziţie „$*$” este comutativă. |
| **5p** | **3.** Arătaţi că $x*y=3\left(x+\dfrac{7}{3}\right)\left(y+\dfrac{7}{3}\right)-\dfrac{7}{3}$, pentru orice numere reale $x$ şi $y$. |
| **5p** | **4.** Determinaţi numerele reale $x$ pentru care $x*x=x$. |
| **5p** | **5.** Arătaţi că $x*\dfrac{1}{x}\geq 31$, pentru orice număr real $x$, $x>0$. |
| **5p** | **6.** Determinaţi numărul real $x$ pentru care $3^x*3^x=83$. |

**Subiectul 2**

**1.** $(-3)*3=3\cdot(-3)\cdot 3+7\underbrace{(-3+3)}_{0}+14=-27+14=-13$

**2.** $x*y=3xy+7(x+y)+14=3yx+7(y+x)+14=y*x$ pentru $\forall x,y\in\mathbb{R}$ deci legea de compoziție dată este comutativă.

**3.** $x*y=3xy+7x+7y+\dfrac{49}{3}-\dfrac{7}{3}=3x\left(y+\dfrac{7}{3}\right)+7\left(y+\dfrac{7}{3}\right)-\dfrac{7}{3}=(3x+7)\left(y+\dfrac{7}{3}\right)-\dfrac{7}{3}=3\left(x+\dfrac{7}{3}\right)\left(y+\dfrac{7}{3}\right)-\dfrac{7}{3}$ pentru $\forall x,y\in\mathbb{R}$

**4.** $x*x=3xx+7(x+x)+14=3x^2+14x+14$

Se obține ecuația $3x^2+14x+14=x$

$3x^2+13x+14=0$

$\Delta=b^2-4ac=13^2-4\cdot 3\cdot 14=169-168=1$

$x_1,x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-13\pm 1}{6}$

$x_1=\dfrac{-13+1}{6}=\dfrac{-12}{6}=-2$

$x_2=\dfrac{-13-1}{6}=\dfrac{-14}{6}=-\dfrac{7}{3}$

(vezi și soluția din barem)

**5.** $x*\dfrac{1}{x}\geq 31\Leftrightarrow 3\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}+7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+14\geq 31\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}\geq 2\Leftrightarrow\dfrac{x^2-2x+1}{x}\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{(x-1)^2}{x}\geq 0$ pentru orice $x>0$.

**6.** Notăm $3^x=y$

$y*y=83\Leftrightarrow 3y^2+14y+14=83$

$3y^2+14y-69=0$

$\Delta=14^2-4\cdot 3\cdot(-69)=196+828=1024=32^2$

$y_1, y_2 = \frac{-14 \pm 32}{6}$ de unde obținem $y_1 = -\frac{23}{3}$ și $y_2 = 3$.

Revenim la notația făcută:

$3^x = -\frac{23}{3}$ care nu are soluții

$3^x = 3$ cu soluția $x = 1$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real. |
| **5p** | **1.** Arătați că $\det(A(1)) = 8$. |
| **5p** | **2.** Arătați că $A(0) \cdot A(2020) = 3A(2020)$. |
| **5p** | **3.** Determinați numerele reale $a$ pentru care $\det(A(a)) = -16$. |
| **5p** | **4.** Arătați că $A(1) + A(2) + \ldots + A(10) = 10A\left(\frac{11}{2}\right)$. |
| **5p** | **5.** Determinați numărul natural $m$ pentru care matricea $B = A(m) + A(m^2)$ **nu** este inversabilă. |
| **5p** | **6.** Determinați perechile de numere întregi $(a,b)$ pentru care suma elementelor matricei $A(a) \cdot A(b)$ este egală cu $2$. |

<u>**Subiectul 3**</u>

**1.** $A(1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 8$

**2.** $A(0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $A(2020) = \begin{pmatrix} 3 & 2020 \\ 2020 & 3 \end{pmatrix}$

$A(0) \cdot A(2020) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2020 \\ 2020 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2020 & 3 \cdot 2020 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2020 & 0 \cdot 2020 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2020 \\ 3 \cdot 2020 & 3 \cdot 3 \end{pmatrix} =$

$= 3\begin{pmatrix} 3 & 2020 \\ 2020 & 3 \end{pmatrix} = 3A(2020)$

sau soluția din barem care e mai simplă.

**3.** $\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{vmatrix} = 9 - a^2$

Obținem $9 - a^2 = -16 \Leftrightarrow a^2 = 25$ de unde $a = \pm 5$.

**4.** $A(1) + A(2) + \ldots + A(10) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 10 & 1 + 2 + \ldots + 10 \\ 1 + 2 + \ldots + 10 & 3 \cdot 10 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 30 & 55 \\ 55 & 30 \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 3 & \frac{55}{10} \\ \frac{55}{10} & 3 \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 3 & \frac{11}{2} \\ \frac{11}{2} & 3 \end{pmatrix} = 10A\left(\frac{11}{2}\right)$

**5.** $B = A(m) + A(m^2) = \begin{pmatrix} 3 & m \\ m & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & m^2 \\ m^2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & m + m^2 \\ m + m^2 & 6 \end{pmatrix}$

O matrice **nu** este inversabila dacă și numai dacă determinantul ei este egal cu 0.

$\det B = \begin{vmatrix} 6 & m+m^2 \\ m+m^2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 36-\left(m+m^2\right)^2 = 0$ de unde rezultă $m^2+m=\pm 6$

Ecuația $m^2+m+6=0$ nu are soluții reale deoarece $\Delta=-23<0$

Ecuația $m^2+m-6=0$ are soluțiile $m_1=-3\notin\mathbb{N}$ și $m_2=2\in\mathbb{N}$.

Singura soluție convenabila este $m=2$.

**6.** $A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & b \\ b & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9+ab & 3a+3b \\ 3a+3b & 9+ab \end{pmatrix}$

Suma elementelor matricei $A(a)\cdot A(b)$ este $S=6a+6b+2ab+18=2(ab+3a+3b+9)=2(a+3)(b+3)$

Rezultă $2(a+3)(b+3)=2$ de unde $(a+3)(b+3)=1$

Cum $a+3$ și $b+3$ sunt numere întregi rezultă:

$\begin{cases} a+3=1 \\ b+3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases}$

sau

$\begin{cases} a+3=-1 \\ b+3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=-4 \end{cases}$

Perechile cerute sunt $(-2,-2)$ și $(-4,-4)$.