Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Centrul Național de Evaluare şi Examinare

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011**
**Proba E. c)**
**Probă scrisă la MATEMATICĂ** **Model**

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințele naturii.**
**Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.**

- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| **5p** | **1.** Determinați numerele întregi $x$ care verifică relația $-1 \le \frac{x+1}{3} < 1$. |
| **5p** | **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^2-2x+3$. |
| **5p** | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2-\sqrt{2-x}=x$. |
| **5p** | **4.** Calculați $\frac{P_5}{C_5^2+A_6^2}$. |
| **5p** | **5.** În sistemul de coordonate $xOy$ se consideră punctele $A(2,3)$ şi $B(-1,0)$. Scrieți ecuația dreptei $AB$. |
| **5p** | **6.** Calculați perimetrul triunghiului $MNP$ ştiind că $MN=2$, $MP=3$ şi $m(\sphericalangle NMP)=120^\circ$. |

## Soluţii

**Subiectul1**

**1.** $-1 \le \frac{x+1}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 \le x+1 < 3 \Leftrightarrow -4 \le x < 2$

Soluţia exerciţiului este $x \in \{-4,-3,-2,-1,0,1\}$.

**2.**Coordonatele punctelor de intersecţie a graficelor a două funcţii se obţin rezolvand ecuaţia $f(x)=g(x)$.
In cazul nostru avem:
$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2x-1=x^2-2x+3 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0$.
Această ecuaţie are o singură soluţie şi anume $x=2$.
$f(2)=g(2)=3$ deci graficele celor două funcţii se intersectează intr-un singur punct $A(2,3)$.

**3.**Punem condiţii de existenţă $2-x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty,2]$.
Pentru rezolvare avem:
$2-\sqrt{2-x}=x \Leftrightarrow 2-x=\sqrt{2-x} \Rightarrow (2-x)^2=\left(\sqrt{2-x}\right)^2 \Rightarrow 4-4x+x^2=2-x$
$x^2-3x+2=0$ care are soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=2$.

**4.** $P_5=5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$

$$C_5^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}=10$$

$$A_6^2=\frac{6!}{(6-2)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=30$$

$$\frac{P_5}{C_5^2+A_6^2}=\frac{120}{10+30}=\frac{120}{40}=3.$$

**5.**Ecuaţia dreptei AB se poate calcula cu formula $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

In exerciţiul dat avem:

$\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-3}{0-3}\Leftrightarrow -3(x-2)=-3(y-3)\Leftrightarrow x-2=y-3\Leftrightarrow x-y+1=0$ care este ecuaţia cerută.

**6.**Aplicăm teorema cosinusului şi avem:

$NP^2=NM^2+PM^2-2NM\cdot PM\cdot\cos(\square NMP)$

$NP^2=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=4+9+6=19$

$NP=\sqrt{19}$

$P_{\Delta ABC}=MN+MP+NP=5+\sqrt{19}$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$. |
| **5p** | **a)** Calculaţi determinantul matricei $A$. |
| **5p** | **b)** Calculaţi $A^2-2A+I_2$. |
| **5p** | **c)** Determinaţi matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X^2=A$. |
| | **2.** Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-3x-3y+12$. |
| **5p** | **a)** Demonstraţi că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x=19$. |
| **5p** | **c)** Ştiind că legea "$*$" este asociativă, calculaţi $\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*...*\sqrt[3]{2011}$. |

**Subiectul 2**

**1.a)** $\det A=\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1.$

**b)** $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$

$A^2-2A+I_2=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&4\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_2$

**c)**Fie $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\square)$. Avem $X^2=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}a^2+bc=1\\ab+bd=2\\ac+cd=0\\bc+d^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+bc=1\\b(a+d)=2\\c(a+d)=0\\bc+d^2=1\end{cases}$.Din a doua relaţie deducem că $a+d\neq 0$ şi atunci din a treia relaţie obţinem că

$c=0$.Sistemul de mai sus devine: $\begin{cases}a^2=1\\b(a+d)=2\\d^2=1\end{cases}$.Acest sistem are soluţiile: $\begin{cases}a=1\\b=1\\c=0\\d=1\end{cases}$ şi $\begin{cases}a=-1\\b=-1\\c=0\\d=-1\end{cases}$.

In concluzie matricea X căutată este $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ sau $X=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

**2.a)** $(x-3)(y-3)+3=xy-3x-3y+9+3=xy-3x-3y+12=x*y,\forall x,y\in\square$ .

**b)** $x*x=19\Leftrightarrow(x-3)(x-3)+3=19\Leftrightarrow x^2-6x+12-19=0\Leftrightarrow x^2-6x-7=0$ care are soluţiile $x_1=7$ şi $x_2=-1$.

**c)**Să observăm că $x*3=3*x=3,\forall x\in\square$ .

$$\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*...*\sqrt[3]{2011}=\underbrace{\left(\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*\sqrt[3]{3}*...*\sqrt[3]{26}\right)}_{x}*3*\underbrace{\left(\sqrt[3]{28}*\sqrt[3]{29}*...*\sqrt[3]{2011}\right)}_{y}=3.$$

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-x$.

**5p** **a)** Demonstrați că $f'(x)-f(x)=x-1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției $f$ spre $-\infty$.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$.

**5p** **a)** Calculați $\int_1^e\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)dx$.

**5p** **b)** Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuație $x=1$ şi $x=2$.

**5p** **c)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

**Subiectul 3**

**1.a)** $f'(x)=(e^x-x)'=e^x-1$

$f'(x)-f(x)=e^x-1-(e^x-x)=e^x-1-e^x+x=x-1,\forall x\in\square$ .

**b)**Formula pentru ecuaţia tangentei la graficul unei funcţii intr-un punct de pe grafic de abscisă $x_0$ este dată de formula $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

In cazul nostru avem: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$f(0)=e^0-0=1$

$f'(0)=e^0-1=0$

Rezultă că ecuaţia cerută este $y-1=0$.

**c)** Asimptota oblică spre $-\infty$ (dacă există) are ecuaţia y=mx+n unde m şi n se calculează cu formulele:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-m\cdot x\right]$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(e^x-x\right)'}{x'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{1}=e^{-\infty}-1=0-1=-1.$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-m\cdot x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[e^x-x+x\right]=\lim_{x\to-\infty}e^x=e^{-\infty}=0$$

Ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ este $y=-x$ ( a doua bisectoare).

**2.a)** $\int_1^e\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)dx=\int_1^e\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\int_1^e\frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1-0=1$.

**b)**Funcţia dată este pozitivă pe tot domeniul de definiţie deci avem:

$$Aria=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\ln|x|+\ln|x+1|\right)\Big|_1^2=\left(\ln 2+\ln 3\right)-\left(\ln 1+\ln 2\right)=\ln 2+\ln 3-\ln 1-\ln 2=\ln 3$$

**c)** $$Vol=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2 f^2(x)dx=\pi\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)^2dx=\pi\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=$$

$$=\pi\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=\pi\int_1^2\left(x^{-2}+\frac{2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}+(x+1)^{-2}\right)dx=$$

$$=\pi\left(-x^{-1}+2\cdot\frac{1}{2\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right|-(x+1)^{-1}\right)\Bigg|_1^2=\pi\left(-\frac{1}{x}+2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{2}+2\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-\pi\left(-1+2\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\pi\left(-\frac{1}{2}+2\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+1-2\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\pi\left(2\ln\frac{2}{3}-2\ln\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=$$

$$=\pi\left(2\ln\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right).$$

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011**
**Proba E. c)**
**Probă scrisă la MATEMATICĂ** **Model**

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.**
**Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.**

## BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $-1 \le \frac{x+1}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 \le x+1 < 3$ | **2p** |
| | $-4 \le x < 2$ | **2p** |
| | $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-4,-3,-2,-1,0,1\}$ | **1p** |
| **2.** | $f(x) = g(x) \Rightarrow 2x-1 = x^2-2x+3$ | **1p** |
| | $\Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=2$ | **2p** |
| | punctul de intersecție este $A(2,3)$ | **2p** |
| **3.** | $\sqrt{2-x} = 2-x$ | **1p** |
| | Condiție $2-x \ge 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2]$ | **1p** |
| | Ecuația dată este echivalentă cu: $2-x = 4-4x+x^2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$ | **2p** |
| | $x \in \{1,2\}$ | **1p** |
| **4.** | $P_5 = 5! = 120,\ C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10,\ A_6^2 = \frac{6!}{4!} = 30$ | **3p** |
| | $\frac{P_5}{C_5^2 + A_6^2} = \frac{120}{40} = 3$ | **2p** |
| **5.** | $\frac{y-3}{0-3} = \frac{x-2}{-1-2}$ | **3p** |
| | Ecuația dreptei $AB: y = x+1$ | **2p** |
| **6.** | Prin aplicarea teoremei cosinusului în triunghiul $MNP$ se obține | |
| | $NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2MN \cdot MP \cdot \cos(\sphericalangle NMP)$ | **2p** |
| | $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \Rightarrow NP^2 = 19 \Rightarrow NP = \sqrt{19}$ | **2p** |
| | Perimetrul este egal cu $5+\sqrt{19}$ | **1p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ | **2p** |
| | $= 1-0 = 1$ | **3p** |

| | | |
|---|---|---|
| **b)** | $A^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$ | **2p** |
| | $A^2-2A+I_2=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$ | **2p** |
| | $=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ | **1p** |
| **c)** | $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Rightarrow X^2=\begin{pmatrix}a^2+bc&b(a+d)\\c(a+d)&d^2+bc\end{pmatrix}$ | **1p** |
| | $X^2=A\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+bc=1\\b(a+d)=2\\c(a+d)=0\\d^2+bc=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+bc=1\\a=d\\ab=1\\c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1\\a=d\\ab=1\\c=0\end{cases}$ | **3p** |
| | Se obțin soluțiile $X=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$ | **1p** |
| **2.a)** | $(x-3)(y-3)+3=xy-3x-3y+9+3$ | **3p** |
| | $=x*y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| **b)** | $x*x=19\Rightarrow(x-3)^2+3=19$ | **2p** |
| | $(x-3)^2=16\Rightarrow x\in\{-1,7\}$ | **3p** |
| **c)** | $x*3=3*x=3,\ \forall x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| | $\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*\ldots*\sqrt[3]{2011}=\left(\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*\ldots*\sqrt[3]{26}\right)*3*\left(\sqrt[3]{28}*\sqrt[3]{29}*\ldots*\sqrt[3]{2011}\right)$ | **2p** |
| | $=3$ | **1p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=\left(e^x-x\right)'=e^x-1$ | **3p** |
| | $f'(x)-f(x)=\left(e^x-1\right)-\left(e^x-x\right)=x-1$ | **2p** |
| **b)** | $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ | **2p** |
| | $f(0)=1,\ f'(0)=0$ | **2p** |
| | Ecuația tangentei este $y=1$ | **1p** |
| **c)** | $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-x}{x}=-1$ | **2p** |
| | $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ | **2p** |
| | Ecuația asimptotei este $y=-x$ | **1p** |
| **2.a)** | $\int_1^e\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)dx=\int_1^e\frac{1}{x}dx$ | **2p** |
| | $=\ln x\Big\|_1^e$ | **2p** |
| | $=1$ | **1p** |

| | | |
|---|---|---|
| **b)** | $A=\int_1^2 \lvert f(x)\rvert \mathrm{d}x=$ | **2p** |
| | $=\left(\ln x+\ln(x+1)\right)\Big\rvert_1^2=$ | **2p** |
| | $=\ln 3$ | **1p** |
| **c)** | $V=\pi\int_1^2 g^2(x)\mathrm{d}x=$ | **1p** |
| | $=\pi\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x(x+1)}\right)\mathrm{d}x=$ | **1p** |
| | $=\pi\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+2\ln\frac{x}{x+1}\right)\Big\rvert_1^2=$ | **2p** |
| | $=\pi\left(\frac{2}{3}+2\ln\frac{4}{3}\right)$ | **1p** |