Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Centrul Național de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_1=5$ şi $r=2$. Calculați suma primilor 5 termeni ai progresiei.

5p **2.** Determinați numărul real m pentru care ecuația $x^2-(m+1)x+m=0$ are soluții reale egale.

5p **3.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^{x+1}-1$ cu axele Ox şi respectiv Oy.

5p **4.** Calculați $2C_4^2-3A_4^1$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\overrightarrow{v_1}=2\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\overrightarrow{v_2}=(a+3)\vec{i}+2\vec{j}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați numărul $a>0$ pentru care vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ sunt coliniari.

5p **6.** Aria triunghiului MNP este egală cu 16, iar $MN=NP=8$. Calculați $\sin N$.

Soluţii

Subiectul1

1.Folosim formulele de la progresii aritmetice $a_n=a_1+(n-1)r$ şi $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$.

Calculăm al 5-lea termen al progresiei:
$a_5=5+(5-1)\cdot 2=13$.
Calculăm suma primilor 5 termeni;
$S_5=\dfrac{5(5+13)}{2}=45$.

2.Ecuaţia dată are două soluţii reale egale dacă $\Delta=0$.
$\Delta=b^2-4ac=[-(m+1)]^2-4\cdot 1\cdot m=(m+1)^2-4m=m^2+2m+1-4m=m^2-2m+1=(m-1)^2$.
Din condiţia $\Delta=0$ obţinem: $(m-1)^2=0\Rightarrow m=1$.

3.Intersecţia cu axa Ox
Rezolvăm ecuaţia $f(x)=0$.
$f(x)=0\Leftrightarrow 2^{x+1}-1=0\Rightarrow 2^{x+1}=1\Rightarrow x+1=0\Rightarrow x=-1$.
Punctul de intersecţie cu axa Ox este $A(-1,0)$.

Intersecţia cu axa Oy
Calculăm $f(0)$.
$f(0)=2^{0+1}-1=2-1=1$.
Punctul de intersecţie cu axa Oy este $B(0,1)$.

4.Folosim formulele $A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$ şi $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 6$.

$A_4^1 = \frac{4!}{(4-1)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} = 4$.

In final avem: $2C_4^2 - 3A_4^1 = 2\cdot 6 - 3\cdot 4 = 0$.

5.**Condiţia de coliniaritate a doi vectori in plan**:

Fie $\vec{v_1} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$ şi $\vec{v_2} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$ doi vectori in plan.Condiţia de coliniaritate a vectorilor $\vec{v_1}$ şi $\vec{v_2}$ este: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

In cazul nostru avem: $\frac{2}{a+3} = \frac{a}{2} \Rightarrow a^2 + 3a - 4 = 0$ care are soluţiile $a_1 = 1$ şi $a_2 = -4$.

6. $Aria = \frac{MN\cdot NP\cdot \sin N}{2} \Rightarrow 16 = \frac{8\cdot 8\cdot \sin N}{2} \Rightarrow 16 = 32\cdot \sin N \Rightarrow \sin N = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n(n-1, n+2)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
5p	**a)** Determinați ecuația dreptei A_1A_2.
5p	**b)** Demonstrați că punctele A_m, A_n, A_p sunt coliniare, oricare ar fi $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.
5p	**c)** Pentru fiecare $p \in \mathbb{N}^*$ notăm $M_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid A_nA_p \le 2\}$. Determinați elementele mulțimii M_{2011}.
	2. Se consideră polinomul $f = X^3 + (m-3)X^2 - 17X + (2m+7)$, cu $m \in \mathbb{R}$.
5p	**a)** Pentru $m = 4$ determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X - 3$.
5p	**b)** Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X - 1$.
5p	**c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^x + 9^x - 17\cdot 3^x + 15 = 0$.

Subiectul 2

1.a) $A_1(0,3)$ şi $A_2(1,4)$.

Ecuaţia dreptei A_1A_2 se poate afla cu ajutorul unui determinant astfel:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + y - 3 - 4x = 0 \Rightarrow x - y + 3 = 0$$

b) $A_m(m-1, m+2)$

$A_n(n-1, n+2)$

$A_p(p-1, p+2)$

Coliniaritatea punctelor A_m, A_n, A_p se poate demonstra cu ajutorul unui determinant:

$$\begin{vmatrix} m-1 & m+2 & 1 \\ n-1 & n+2 & 1 \\ p-1 & p+2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & m & 1 \\ n & n & 1 \\ p & p & 1 \end{vmatrix} = 0$$

In calculul de mai sus am folosit proprietăţile determinanţilor:

- Am adunat ultima coloană la prima coloană;
- Am inmulţit ultima coloana cu -2 şi am adunat rezultatul la coloana a doua;
- Ultimul determinat este 0 deoarece are două coloane egale.

Rezultă că punctele A_m, A_n, A_p sunt coliniare.

c) $M_{2011} = \{n \in N^* / A_nA_{2011} \le 2\}$.

$A_n(n-1, n+2)$

$A_{2011}(2010,2013)$

$A_nA_{2011}=\sqrt{(2010-n+1)^2+(2013-n-2)^2}=\sqrt{(2011-n)^2+(2011-n)^2}=\sqrt{2(2011-n)^2}=|2011-n|\sqrt{2}\le 2$

$\Rightarrow |2011-n|\le\sqrt{2}$.

Dar numărul $|2011-n|$ este natural deci rezultă că $|2011-n|\in\{0,1\}$

Ecuaţia $|2011-n|=0$ are soluţia $n=2011$.

Ecuaţia $|2011-n|=1$ are două soluţii şi anume $n=2010$ şi $n=2012$.

In final se obţine mulţimea $M_{2011}=\{2010,2011,2012\}$.

2.a) Pentru aflarea catului şi restului se poate face schema de impărţire a celor două polinoame sau se poate face schema lui Horner.

Schema lui Horner este in felul următor:

	X^3	X^2	X^1	X^0
	1	1	-17	15
3	1	4	-5	0

Din schema de mai sus obţinem restul egal cu 0 şi catul $C(X)=X^2+4X-5$.

b)f este divizibil cu $X-1 \Leftrightarrow f(1)=0$.

$f(1)=1+m-3-17+2m+7=0 \Rightarrow 3m=12 \Rightarrow m=4$

c)Facem notaţia $3^x=y>0$ şi ecuaţia dată devine $y^3+y^2-17y+15=0$.

Conform punctelor a) şi b) polinomul $f=X^3+X^2-17X+15$ este divizibil cu $X-3$ şi $X-1$.

Ecuaţia in y se poate scrie sub forma $(y-3)(y-1)(y+5)=0$ care are soluţiile $y_1=3$, $y_2=1$ şi $y_3=-5$.

Revenim la notaţia făcută:

$3^x=3 \Rightarrow x=1$

$3^x=1 \Rightarrow x=0$

$3^x=-5$ care nu are soluţii.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-4}{x^2+1}, & x\le 0\\ x-4, & x>0\end{cases}$.

5p **a)** Demonstraţi că funcţia f este continuă în punctul $x_0=0$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{16-x^2}$.

5p **c)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(-1,-2)$.

2. Se consideră funcţiile $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=3m^2x^2+6mx+9$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Determinaţi mulţimea primitivelor funcţiei f_0.

5p **b)** Calculaţi aria suprafeţei cuprinse între graficul funcţiei f_1, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Calculaţi $\int_1^2 \dfrac{f_2(x)-9}{x}\cdot e^x dx$.

Subiectul 3

1.a) Calculăm limitele laterale şi f(0):

$l_s = \lim\limits_{x\to 0, x<0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0, x<0} \frac{-4}{x^2+1} = -4$

$l_d = \lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0, x>0} (x-4) = -4$

$f(0) = -4$.

Rezultă că funcţia este continuă in punctul $x_0 = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{f(x)}{16-x^2} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{(4-x)(4+x)} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{-1}{4+x} = -\frac{1}{8}$.

Obs: In calculul limitei de mai sus am inlocuit f(x) cu a doua formulă deoarece dacă x tinde la 4 atunci evident că x este mai mare ca 0.

c) Tangenta la graficul unei funcţii in punctul de abscisă x_0 se obţine cu formula

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

In cazul nostru $x_0 = -1$.

Ecuaţia tangentei este $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$

$f(-1) = -2$.

Pentru $x \le 0$ avem $f(x) = \frac{-4}{x^2+1}$.

Calculăm $f'(x)$ pentru $x < 0$:

$$f'(x) = \left(\frac{-4}{x^2+1}\right)' = \frac{(-4)'\cdot(x^2+1) - (-4)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{8x}{(x^2+1)^2}.$$

$f'(-1) = \frac{-8}{4} = -2$.

Ecuaţia tangentei este $y+2 = -2(x+1) \Leftrightarrow y+2 = -2x-2 \Leftrightarrow y = -2x-4$.

2.a) $f_0 = 9$.

Mulţimea primitivelor este $\int f_0(x)dx = \int 9dx = 9x + C$

b) $f_1(x) = 3x^2 + 6x + 9$ şi este pozitiva pe **R** deoarece are $\Delta < 0$ şi a=3>0.

$$Aria = \int_0^1 |f_1(x)|dx = \int_0^1 \left(3x^2+6x+9\right)dx = \left(x^3+3x^2+9x\right)\Big|_0^1 = 1+3+9-0 = 13$$

c) $f_2(x) = 12x^2 + 12x + 9$

$$\int_1^2 \frac{f_2(x)-9}{x}\cdot e^x dx = \int_1^2 \frac{12x^2+12x+9-9}{x}\cdot e^x dx = \int_1^2 (12x+12)\cdot e^x dx = \int_1^2 (12x+12)\cdot(e^x)'dx =$$

Folosim metoda de integrare prin părţi:

$$= \int_1^2 (12x+12)\cdot(e^x)'dx = (12x+12)\cdot(e^x)\Big|_1^2 - \int_1^2 (12x+12)'\cdot(e^x)dx = 36\cdot e^2 - 24e - 12\int_1^2 e^x dx =$$

$$= 36\cdot e^2 - 24e - 12e^x\Big|_1^2 = 36\cdot e^2 - 24e - 12(e^2 - e) = 24e^2 - 12e.$$

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$S_5=\dfrac{(2a_1+4r)\cdot 5}{2}$	**3p**
	$S_5=45$	**2p**
2.	$\Delta=0$	**1p**
	$m^2+2m+1-4m=0$	**2p**
	$m=1$	**2p**
3.	$G_f\cap Ox: f(x)=0\Rightarrow x=-1$	**2p**
	$A(-1,0)$	**1p**
	$G_f\cap Oy: f(0)=1$	**1p**
	$B(0,1)$	**1p**
4.	$C_4^2=6$	**2p**
	$A_4^1=4$	**2p**
	$2C_4^2-3A_4^1=0$	**1p**
5.	$\dfrac{2}{a+3}=\dfrac{a}{2}$	**2p**
	$a^2+3a-4=0\Rightarrow a=1$ sau $a=-4$	**2p**
	$a>0\Rightarrow a=1$	**1p**
6.	Aria $\Delta MNP=\dfrac{MN\cdot NP\cdot\sin N}{2}$	**2p**
	$\sin N=\dfrac{2\cdot 16}{8\cdot 8}$	**2p**
	$\sin N=\dfrac{1}{2}$	**1p**

SUBIECTUL al II -lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A_1(0,3)$, $A_2(1,4)$	**2p**
	$A_1A_2:\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}=0$	**2p**
	$A_1A_2: y=x+3$	**1p**

b)	Justificarea faptului că $\begin{vmatrix} m-1 & m+2 & 1 \\ n-1 & n+2 & 1 \\ p-1 & p+2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow A_m, A_n, A_p$ coliniare	**3p** **2p**
c)	$A_n A_{2011} \le 2$ $\sqrt{(n-2011)^2 + (n-2011)^2} \le 2$ $\lvert n-2011 \rvert \le \sqrt{2}$ $M_{2011} = \{2010, 2011, 2012\}$	**1p** **1p** **1p** **2p**
2.a)	$m = 4 \Rightarrow f = X^3 + X^2 - 17X + 15$ $C = X^2 + 4X - 5$ $R = 0$	**1p** **3p** **1p**
b)	$f \vdots (X-1) \Leftrightarrow f(1) = 0$ $f(1) = 1 + m - 3 - 17 + 2m + 7 = 3m - 12$ $3m - 12 = 0 \Rightarrow m = 4$	**2p** **1p** **2p**
c)	Cu notația $3^x = y > 0 \Rightarrow y^3 + y^2 - 17y + 15 = 0 \Rightarrow (y-1)(y-3)(y+5) = 0$ $y = -5 < 0$ $y = 1 \Rightarrow x = 0$ $y = 3 \Rightarrow x = 1$	**2p** **1p** **1p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea **30 de puncte**

1.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = -4$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = -4$, $f(0) = -4$ f este continuă în punctul $x_0 = 0$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 4} \frac{f(x)}{16-x^2} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{(4-x)(4+x)} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{-1}{4+x}$ $\lim\limits_{x\to 4} \frac{f(x)}{16-x^2} = -\frac{1}{8}$	**3p** **2p**
c)	Ecuația tangentei este $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$ Pentru $x \le 0$, $f(x) = \frac{-4}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{8x}{\left(x^2+1\right)^2}$, oricare ar fi $x < 0$ Ecuația tangentei este $y = -2x - 4$	**2p** **2p** **1p**
2.a)	Mulțimea primitivelor este $\int 9dx =$ $= 9x + C$	**2p** **3p**
b)	$A = \int_0^1 \lvert 3x^2 + 6x + 9 \rvert dx = \int_0^1 \left(3x^2 + 6x + 9\right) dx =$ $= \left(x^3 + 3x^2 + 9x\right)\Big\|_0^1 =$ $= 13$	**2p** **2p** **1p**

c)	$\int_1^2 (12x+12)e^x dx = 12xe^x \Big\|_1^2 =$	**3p**
	$= 24e^2 - 12e$	**2p**