Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
Centrul Național de Evaluare și Examinare

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că numărul $n=\left(\sqrt{5}-1\right)^2+2\sqrt{5}$ este natural.
5p	**2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+4$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(2-x^2\right)=\log_2 x$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, aceasta să aibă cel mult un element.
5p	**5.** Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+6\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=4\vec{i}+6\vec{j}$. Determinați lungimea segmentului $[AC]$.
5p	**6.** Se consideră numerele reale a și b astfel încât $a+b=\frac{\pi}{3}$. Arătați că $2\cos b=\cos a+\sqrt{3}\sin a$.

Soluții

Subiectul1

1. $n=\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}+1+2\sqrt{5}=6\in N$.

2.Graficul intersectează axa Ox in două puncte distincte dacă ecuația $f(x)=0$ are două rădăcini reale diferite adică dacă $\Delta>0$.

$\Delta=m^2-16>0$

$m^2>16\Leftrightarrow m\in(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

3.Punem condiții de existență:

$$\begin{cases}2-x^2>0\\ x>0\end{cases}\Rightarrow x\in\left(0,\sqrt{2}\right)$$

Ecuația dată devine:

$2-x^2=x$

$x^2+x-2=0$

care are soluțiile $x_1=1$ și $x_2=-2$ dintre care doar $x_1=1$ este acceptabilă.

4. Probabilitatea unui eveniment se calculează cu formula:

$$P=\frac{nr.cazuri-favorabile}{nr.cazuri-posibile}$$

Mulțimea A are in total $2^7=128$ submulțimi deci sunt 128 de cazuri posibile.

Cazurile favorabile sunt $\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\}$ deci sunt 8 cazuri favorabile.

$$P=\frac{8}{128}=\frac{1}{16}.$$

5. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=5\vec{i}+12\vec{j}$

$AC=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$

6. $b=\frac{\pi}{3}-a\Rightarrow\cos b=\cos\left(\frac{\pi}{3}-a\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos a+\sin\frac{\pi}{3}\sin a=\frac{1}{2}\cos a+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin a$

$2\cos b=\cos a+\sqrt{3}\sin a$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se notează cu $D(x,y)$ determinantul matricei $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & y & x \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Calculați $D(-1,2)$.

5p **b)** Determinați numărul real q pentru care matricea $A(2,q)$ are rangul egal cu 2.

5p **c)** Arătați că există cel puțin o pereche (x,y) de numere reale, cu $x\neq y$, pentru care $D(x,y)=D(y,x)$.

2. Se notează cu x_1,x_2,x_3 rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului $f=X^3+X-m$, unde m este un număr real.

5p **a)** Determinați m astfel încât restul împărțirii polinomului $f(X)$ la $X-1$ să fie egal cu 8.

5p **b)** Arătați că numărul $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ este întreg, pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** În cazul $m=2$ determinați patru numere întregi a,b,c,d, cu $a>0$, astfel încât polinomul $g=aX^3+bX^2+cX+d$ să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$.

Subiectul 2

1.a) $D(-1,2)=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-1+8+1+2+2+2=14$.

b) $A(2,q)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & q & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=4-2=2\neq 0\Rightarrow rangA(2,q)\geq 2$.

In concluzie $rangA(2,q)=2\Leftrightarrow D(2,q)=0$

$D(2,q)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & q & 2 \end{vmatrix}=8+4q+1-4-2q-4=2q+1$

$D(2,q)=0\Leftrightarrow 2q+1=0\Leftrightarrow q=-\frac{1}{2}$

c) $D(x,y)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & y & x \end{vmatrix}=x^3+4y+1-2x-xy-2x=x^3+4y-4x-xy+1$

$D(y,x)=\begin{vmatrix} y & 1 & 2 \\ 2 & y & 1 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}=y^3+4x+1-2y-xy-2y=y^3+4x-4y-xy+1$

$D(x,y)=D(y,x)\Rightarrow x^3+4y-4x-xy+1=y^3+4x-4y-xy+1\Rightarrow$

$\Rightarrow x^3-y^3+8y-8x=0\Rightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)-8(x-y)=0\Rightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2-8)=0$

Deoarece in enunţ este pusă condiţia $x\neq y$ vom căuta x şi y astfel incat $x^2+xy+y^2-8=0$.

Un exemplu simplu este $x=0\Rightarrow y^2-8=0\Rightarrow y=\pm 2\sqrt{2}$

Putem lua $(x,y)=(0,2\sqrt{2})$.

2.a) Restul impărţirii polinomului f la $X-1$ este $r=f(1)$.

Punem condiţia $f(1)=8$.

$f(1)=2-m=8\Rightarrow m=-6$.

b) Scriem relaţiile lui Viete:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}=0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a}=1 \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}=m \end{cases}$$

$(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\Rightarrow$

$0=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2\in Z,\forall m\in R$

c) $f=X^3+X-2$

Facem schimbarea $\dfrac{1}{X}=Y\Leftrightarrow X=\dfrac{1}{Y}$

$$\left(\frac{1}{Y}\right)^3+\frac{1}{Y}-2=\frac{1}{Y^3}+\frac{1}{Y}-2=\frac{1+Y^2-2Y^3}{Y^3}$$

Rezultă că polinomul $-2Y^3+Y^2+1$ are rădăcinile $y_1=\dfrac{1}{x_1},y_2=\dfrac{1}{x_2},y_3=\dfrac{1}{x_3}$.

Deoarece in enunţ se impune condiţia $a>0$ putem lua polinomul $g=2X^3-X^2+0X-1$

Rezultă o soluţie a exerciţiului $a=2,b=-1,c=0,d=-1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Calculaţi $f'(0)$.

5p **b)** Arătaţi că, pentru fiecare număr natural $n\geq 2$, ecuaţia $f(x)=n$ are exact o soluţie în intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Fie x_n unica soluţie din intervalul $(0,+\infty)$ a ecuaţiei $f(x)=n$, unde n este număr natural, $n\geq 2$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$ şi se notează cu S suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=\dfrac{\pi}{2}$.

5p **a)** Calculaţi aria suprafeţei S.

5p **b)** Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia suprafeţei S în jurul axei Ox.

5p **c)** Demonstraţi că $\int_0^{2\pi} f^n(kx)\,dx=\int_0^{2\pi} f^n(x)\,dx$, pentru orice numere naturale $n,k\geq 1$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left(e^x-x\right)'=e^x-1,\forall x\in R$

Rezultă $f'(0)=e^0-1=1-1=0$.

b) $f(0)=1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty} e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)=+\infty(1-0)=+\infty$$

Funcţia f este continuă deci ecuaţia dată are cel puţin o soluţie $x_n>0$.

Funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$ deoarece $f'(x)=e^x-1>0,\forall x>0$.

Rezultă că funcţia f este injectivă pe $[0,+\infty)$ deci ecuaţia date are soluţie unică $x_n>0$.

c) $f(x_n)=n\Rightarrow e^{x_n}-x_n=n\Rightarrow e^{x_n}=n+x_n>n\Rightarrow x_n>\ln n,\forall n\geq 2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\geq\lim\limits_{x\to+\infty}\ln n=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$.

2.a) Funcţia dată este pozitivă pe intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$Aria=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1.$$

b)

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx=\frac{\pi}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\left(0+\frac{\sin 0}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$$

c) Facem schimbarea de variabilă $kx=t$.

$x=0\Rightarrow t=0$

$x=2\pi\Rightarrow t=2k\pi$

$(kx)'dx=t'dt\Rightarrow dx=\frac{1}{k}dt$

Rezultă:

$$\int_0^{2\pi} f^n(kx)dx=\frac{1}{k}\int_0^{2k\pi}\cos^n t dt=\frac{1}{k}\left(\int_0^{2\pi}\cos^n t dt+\int_{2\pi}^{4\pi}\cos^n t dt+\int_{4\pi}^{6\pi}\cos^n t dt+\ldots+\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}\cos^n t dt\right)=$$

$$=\frac{1}{k}k\int_0^{2\pi}\cos^n t dt=\int_0^{2\pi}\cos^n t dt=\int_0^{2\pi} f^n(x)dx$$

Am ţinut cont mai sus că funcţia $g_n:R\to R, g_n(x)=\cos^n x$ este periodică de perioadă 2π deci integralele definite din paranteză sunt egale.

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare și de notare

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(\sqrt{5}-1)^2+2\sqrt{5}=\left(5-2\sqrt{5}+1\right)+2\sqrt{5}=$	**3p**
	$=6\in\mathbb{N}$	**2p**
2.	$f(x)=0$ are două soluții reale distincte	**2p**
	$\Delta=m^2-16>0$	**1p**
	$m\in(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$	**2p**
3.	$2-x^2=x$	**1p**
	$x_1=1,\ x_2=-2$	**2p**
	x_1 convine și x_2 nu convine	**2p**
4.	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$	**1p**
	Numărul submulțimilor cu cel mult un element este egal cu $C_7^0+C_7^1=8\Rightarrow 8$ cazuri favorabile	**2p**
	Numărul submulțimilor mulțimii A este $2^7=128\Rightarrow 128$ de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{1}{16}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=5\vec{i}+12\vec{j}$	**3p**
	$AC=\sqrt{5^2+12^2}=13$	**2p**
6.	$b=\dfrac{\pi}{3}-a\Rightarrow\cos b=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-a\right)=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{2}\cos a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin a$, de unde concluzia	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(-1,2)=\begin{vmatrix}-1&1&2\\2&-1&1\\1&2&-1\end{vmatrix}$	**1p**
	$D(-1,2)=-1+1+8+2+2+2$	**3p**
	$D(-1,2)=14$	**1p**
b)	$A(2,q)=\begin{pmatrix}2&1&2\\2&2&1\\1&q&2\end{pmatrix}$	**1p**
	Există minorul $d=\begin{vmatrix}2&1\\2&2\end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow \text{rang}\,A(2,q)\geq 2$	**1p**
	$\text{rang}\,A(2,q)=2\Rightarrow D(2,q)=0$	**1p**
	$q=-\dfrac{1}{2}$	**2p**

c)	$D(x,y)=x^3+4y-4x-xy+1$	**1p**
	$D(y,x)=y^3+4x-4y-yx+1$	**1p**
	$D(x,y)=D(y,x)\Rightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2-8)=0\Rightarrow x^2+xy+y^2-8=0$	**2p**
	Finalizare: de exemplu $(x,y)=(0,2\sqrt{2})$	**1p**
2.a)	$f(1)=2-m$	**2p**
	$f(1)=8$	**2p**
	Finalizare: $m=-6$	**1p**
b)	$x_1+x_2+x_3=0$ şi $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=-2\in\mathbb{Z}$	**3p**
c)	x_1,x_2,x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3+X-2\Rightarrow$ polinomul $-2X^3+X^2+1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$	**2p**
	$a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ cu $a>0\Rightarrow g=2X^3-X^2+0\cdot X-1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$	**2p**
	un exemplu este $a=2,\ b=-1,\ c=0,\ d=-1$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x-1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f'(0)=0$	**2p**
b)	$f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ şi f este continuă pe $[0,+\infty)$, deci ecuația dată are cel puțin o soluție	**3p**
	$f'(x)>0$ pentru orice $x>0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[0,+\infty)\Rightarrow f$ este injectivă pe $[0,+\infty)$, deci soluția este unică	**2p**
c)	$f(x_n)=n\Rightarrow e^{x_n}=n+x_n\Rightarrow e^{x_n}>n$ pentru că $x_n>0$, oricare ar fi $n\geq 2$	**2p**
	$x_n>\ln n\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$	**3p**
2.a)	$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\lvert f(x)\rvert dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=$	**2p**
	$=\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=1$	**3p**
b)	$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=$	**1p**
	$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{\pi}{2}\left(x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\sin 2x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi^2}{4}$	**4p**
c)	$t=kx\Rightarrow \int_0^{2\pi}f^n(kx)\,dx=\frac{1}{k}\int_0^{2k\pi}\cos^n t\,dt$	**2p**
	$\int_0^{2k\pi}\cos^n t\,dt=\int_0^{2\pi}\cos^n t\,dt+\int_{2\pi}^{4\pi}\cos^n t\,dt+\ldots+\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}\cos^n t\,dt=$	**2p**

	$= k\int_0^{2\pi} \cos^n t\,dt$, deoarece $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g_n(x) = \cos^n x$ este periodică de perioadă 2π, de unde concluzia	**1p**