Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
Centrul Național de Evaluare și Examinare

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

Model

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați valoarea de adevăr a propoziției „$\frac{1}{3}-\frac{1}{18}+\frac{1}{12}=\frac{13}{36}$".
5p	**2.** Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+3y=1\\3x+2y=-1\end{cases}$, $x,y\in\mathbb{R}$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $x^2+2x-3<0$.
5p	**4.** Determinați domeniul maxim de definiție D al funcției $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2(3-x)$.
5p	**5.** Se consideră pătratul $ABCD$ de centru O. Arătați că $\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
5p	**6.** Arătați că triunghiul care are laturile de $5\sqrt{2}$, 5 și 5 este dreptunghic isoscel.

Soluții

Subiectul1

1.Se aduce la acelaşi numitor , numitorul comun este 36:

$\frac{1}{3}-\frac{1}{18}+\frac{1}{12}=\frac{12}{36}-\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{13}{36}$ deci propoziţia dată este adevărată.

2.Rezolvăm sistemul dat prin metoda reducerii.Pentru aceasta vom inmulţi prima ecuaţie cu 2 , a doua ecuaţie cu -3 şi apoi prin adunarea ecuaţiilor reducem pe y:

$$\begin{cases}2x+3y=1\\3x+2y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+6y=2\\-9x-6y=3\end{cases}$$

După adunarea ecuaţiilor obţinem $-5x=5\Rightarrow x=-1$.

Pentru a afla şi pe y il vom inlocui pe x aflat deja in prima ecuaţie din sistemul dat in enunţ şi obţinem:

$2\cdot(-1)+3y=1\Rightarrow-2+3y=1\Rightarrow3y=1+2\Rightarrow3y=3\Rightarrow y=1$.

3.Se rezolvă ecuaţia $x^2+2x-3=0$ care are soluţiile $x_1=-3$ şi $x_2=1$.

Se face un tabel cu semnul funcţiei $f:R\to R,\ f(x)=x^2+2x-3$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
f(x)		+ + + + + +	0	- - - - - - - -	0	+ + + + + +	

Se citeşte din tabel partea cu - deoarece in inecuaţia din enunţ avem semnul <0.

Inecuaţia dată are soluţia $x\in(-3,1)$.

4.Punem condiţia $3-x>0\Rightarrow x<3\Rightarrow x\in(-\infty,3)\Rightarrow D=(-\infty,3)$.

5.Aplicăm regula triunghiului pentru adunarea vectorilor in triunghiul AOB şi avem $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$ c.c.t.d.

6.Evident triunghiul dat este isoscel deoarece are două laturi egale.

Mai observăm că $\left(5\sqrt{2}\right)^2 = 5^2 + 5^2 \Leftrightarrow 50 = 50$ deci din reciproca teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul dat este şi dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \log_3\left(3^x + 3^y + 1\right)$.

5p **1.** Arătați că $0 \circ 0 = 1$.

5p **2.** Demonstrați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă pe $\mathbb{R}$.

5p **3.** Determinați numărul real x pentru care $x \circ 0 = x + 1$.

5p **4.** Arătați că $x \circ y > 0$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **5.** Verificați dacă legea de compoziție „$\circ$” admite element neutru.

5p **6.** Arătați că $(x \circ x) \circ x = \log_3\left(2 + 3^{x+1}\right)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Subiectul 2

1. $0 \circ 0 = \log_3\left(3^0 + 3^0 + 1\right) = \log_3(1+1+1) = \log_3 3 = 1$.

2. $x \circ y = \log_3\left(3^x + 3^y + 1\right) = \log_3\left(3^y + 3^x + 1\right) = y \circ x, \forall x, y \in R$ deci legea de compoziţie dată este comutativă pe **R**.

3. $x \circ 0 = x + 1 \Rightarrow \log_3\left(3^x + 3^0 + 1\right) = x + 1 \Rightarrow \log_3\left(3^x + 2\right) = x + 1 \Rightarrow 3^x + 2 = 3^{x+1} \Rightarrow 3^x + 2 = 3^x \cdot 3$

Facem notaţia $3^x = y$ şi obţinem $y + 2 = 3y \Rightarrow y = 1$.

Revenim la notaţia făcută şi rezultă $3^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

4. $3^x > 0, \forall x \in R$

$3^y > 0, \forall y \in R$

$\Rightarrow 3^x + 3^y + 1 > 1, \forall x, y \in R$

$\Rightarrow \log_3\left(3^x + 3^y + 1\right) > \log_3 1 = 0, \forall x, y \in R$

$\Rightarrow x \circ y > 0, \forall x, y \in R$

5.Legea de compoziţie dată are element neutru dacă există $e \in R$ astfel incat $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in R$

$x \circ e = \log_3\left(3^x + 3^e + 1\right) = x, \forall x \in R$

$\Leftrightarrow 3^x + 3^e + 1 = 3^x, \forall x \in R$

$\Leftrightarrow 3^e + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3^e = -1$

Imposibil , deci legea dată nu are element neutru.

6. $x \circ x = \log_3\left(3^x + 3^x + 1\right) = \log_3\left(2 \cdot 3^x + 1\right), \forall x \in R$

$(x \circ x) \circ x = \left[\log_3\left(2 \cdot 3^x + 1\right)\right] \circ x = \log_3\left(3^{\log_3\left(2 \cdot 3^x + 1\right)} + 3^x + 1\right) = \log_3\left(2 \cdot 3^x + 1 + 3^x + 1\right) = \log_3\left(3 \cdot 3^x + 2\right) =$

$= \log_3\left(2 + 3^{x+1}\right), \forall x \in R$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi sistemul (S) $\begin{cases} mx+y+2z=1 \\ 2x-y+mz=2 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **1.** Pentru $m=1$, arătaţi că $\det A=3$.

5p **2.** Calculaţi determinantul matricei A.

5p **3.** Determinaţi numărul real pozitiv m pentru care $\det(2A)=-16$.

5p **4.** Pentru $m=3$, verificaţi dacă tripletul $\left(\frac{7}{5},-\frac{8}{5},-\frac{4}{5}\right)$ este soluţie a sistemului (S).

5p **5.** Pentru $m=1$, rezolvaţi sistemul (S).

5p **6.** Pentru $m=2$, arătaţi că sistemul (S) nu are soluţii.

Subiectul 3

1. $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1+4+1+2-1-2=3$

2. $\det A=\begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-m+4+m+2-m^2-2=4-m^2$

3.

$$2A=\begin{pmatrix} 2m & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 2m \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(2A)=\begin{vmatrix} 2m & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 2m \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-8m+32+8m+16-8m^2-16=32-8m^2$$

Se obţine ecuaţia $32-8m^2=-16\Rightarrow 8m^2=48\Rightarrow m^2=6\Rightarrow m=\pm\sqrt{6}$.

Se păstrează numai $m=\sqrt{6}$ deoarece se ceruse in enunţ numărul pozitiv m.

4.Pentru $m=3$ sistemul devine:

$$\begin{cases} 3x+y+2z=1 \\ 2x-y+3z=2 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$$

Se verifică cele trei ecuaţii:

$$3\cdot\frac{7}{5}-\frac{8}{5}+2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{21}{5}-\frac{8}{5}-\frac{8}{5}=\frac{5}{5}=1$$

$$2\cdot\frac{7}{5}+\frac{8}{5}+3\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{14}{5}+\frac{8}{5}-\frac{12}{5}=\frac{10}{5}=2$$

$$\frac{7}{5}-\frac{8}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{5}{5}=-1$$

deci tripletul dat este soluţie.

5.Pentru $m=1$ sistemul devine:

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$$

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1+4+1+2-1-2=3$$

$$d_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1+4-1-2-1-2=-3$$

$$d_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2-4+1-4+1-2=-6$$

$$d_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1+2+2+1-2+2=6$$

Se folosesc formulele lui Cramer:

$$\begin{cases} x=\dfrac{d_1}{\det A}=\dfrac{-3}{3}=-1 \\ y=\dfrac{d_2}{\det A}=\dfrac{-6}{3}=-2 \\ z=\dfrac{d_3}{\det A}=\dfrac{6}{3}=2 \end{cases}$$

6. Pentru $m=2$ sistemul devine:

$$\begin{cases} 2x+y+2z=1 \\ 2x-y+2z=2 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$$

Scăzand primele două ecuaţii obţinem $2y=-1 \Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}$

Inlocuind pe y aflat in prima şi a treia ecuaţie obţinem:

$$\begin{cases} 2x-\dfrac{1}{2}+2z=1 \\ x-\dfrac{1}{2}+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2z=\dfrac{3}{2} \\ x+z=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=\dfrac{3}{4} \\ x+z=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$ imposibil , deci sistemul nu are soluţie.

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

Barem de evaluare și de notare

Model

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{3}-\frac{1}{18}+\frac{1}{12}=\frac{12}{36}-\frac{2}{36}+\frac{3}{36}$ Propoziția este adevărată	**3p** **2p**
2.	$x=-1$ $y=1\Rightarrow$ soluția sistemului este $(-1,1)$	**2p** **3p**
3.	$x^2+2x-3=0\Rightarrow x_1=1,\ x_2=-3$ Finalizare: $x\in(-3,1)$	**3p** **2p**
4.	$3-x>0$ $x<3\Rightarrow D=(-\infty,3)$	**2p** **3p**
5.	$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}$ $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
6.	Triunghiul este isoscel $\left(5\sqrt{2}\right)^2=5^2+5^2$ Din reciproca teoremei lui Pitagora triunghiul este dreptunghic	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$0\circ 0=\log_3\left(3^0+3^0+1\right)=$ $=\log_3 3=$ $=1$	**2p** **2p** **1p**
2.	$x\circ y=\log_3\left(3^x+3^y+1\right)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$ $y\circ x=\log_3\left(3^y+3^x+1\right)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
3.	$x\circ 0=x+1\Rightarrow\log_3\left(2+3^x\right)=x+1$ $2+3^x=3^{x+1}\Rightarrow 3^x=1$ $x=0$	**2p** **2p** **1p**
4.	$3^x>0,\ 3^y>0$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$ $3^x+3^y+1>1\Rightarrow\log_3\left(3^x+3^y+1\right)>0\Rightarrow x\circ y>0$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
5.	Dacă $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x\circ e=x\Rightarrow\log_3\left(3^x+3^e+1\right)=x$ $3^e=-1$	**2p** **1p**

	Finalizare: legea nu admite element neutru	2p
6.	$x \circ x = \log_3\left(2 \cdot 3^x + 1\right)$	2p
	$(x \circ x) \circ x = \log_3\left(2 \cdot 3^x + 1 + 3^x + 1\right) =$	2p
	$= \log_3\left(2 + 3^{x+1}\right)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$m = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	3p
	$\det A = 3$	2p
2.	$\det A = -m + 4 + m + 2 - m^2 - 2 =$	3p
	$= -m^2 + 4$	2p
3.	$\det(2A) = -16 \Rightarrow 2^3 \cdot (2 - m)(2 + m) = -16$	2p
	$4 - m^2 = -2 \Rightarrow m^2 = 6$	1p
	$m = \pm\sqrt{6} \Rightarrow m = \sqrt{6}$	2p
4.	$m = 3 \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$	2p
	Verificare: $\left(\frac{7}{5}, -\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ este soluție	3p
5.	$m = 1 \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$	2p
	$x = -1,\ y = -2,\ z = 2$	3p
6.	$m = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$	2p
	Scăzând primele 2 ecuații $\Rightarrow y = -\frac{1}{2}$	1p
	Înlocuind în prima și a treia ecuație $\Rightarrow \begin{cases} 2x + 2z = \frac{3}{2} \\ x + z = -\frac{1}{2} \end{cases}$, imposibil, deci sistemul nu are soluție	2p