http://variante-mate.ro

Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
Centrul Național de Evaluare și Examinare

**Examenul de bacalaureat național 2013**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_şt-nat***

**Model**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Calculați produsul primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 2$ și $a_2 = 1$.

**5p** **2.** Determinați valorile reale ale lui $m$ pentru care $x^2 - 2x - m > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x + \log_2 (x-1) = \log_2 12$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de trei cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 3.

**5p** **5.** Calculați $\vec{a} \cdot \vec{b}$, știind că $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ și unghiul vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ are măsura $\frac{\pi}{3}$.

**5p** **6.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(1,3)$, $B(0,1)$ și $C(3,1)$. Determinați coordonatele ortocentrului triunghiului $ABC$.

## Soluții

**Subiectul1**

**1.** Raţia progresiei aritmetice este $r = a_2 - a_1 = 1 - 2 = -1$.

Termenii progresiei sunt $2, 1, 0, -1, -2, \ldots$ etc.

Produsul primilor trei termeni este $2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$.

**2.**

**Obs:**Funcţia de gradul doi are acelaşi semn pe toată axa reală dacă $\Delta < 0$.

Punem condiţia $\Delta < 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m) = 4 + 4m < 0 \Rightarrow 4m < -4 \Rightarrow m < -1 \Rightarrow m \in (-\infty, -1)$.

**3.**Punem condiţii de existenţă:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (1, +\infty)$$

Ecuaţia dată devine

$\log_2 x(x-1) = \log_2 12 \Rightarrow x(x-1) = 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$ care are soluţiile $x_1 = 4$ si $x_2 = -3$.

Dintre aceste două soluţii este bună numai $x_1 = 4$ (deoarece indeplineşte condiţiile de existenţă).

**4.**Probabilitatea unui eveniment se calculează cu formula $P = \frac{nr.cazuri.\,favorabile}{nr.cazuri.\,posibile}$.

Numerele naturale de trei cifre sunt $100, 101, \ldots, 999$ şi sunt in număr de 900.

Deci sunt 900 de cazuri posibile.

Numerele de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 3 sunt 113,131,311 deci sunt 3 cazuri favorabile.

Probabilitatea este $P = \frac{3}{900} = \frac{1}{300}$.

**5.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

**6.**Ortocentrul H este punctul de intersecţie al inălţimilor unui triunghi.

$B(0,1)$ şi $C(3,1)$ rezultă că $BC \parallel Ox$ de unde deducem că inălţimea din A este perpendiculară pe axa Ox deci are ecuaţia $x = x_A$ adică $x = 1$.

Vom afla in continuare ecuaţia inălţimii din B.

Panta dreptei AC este $m_{AC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-3}{3-1}=\frac{-2}{2}=-1$.

$BH\perp AC\Rightarrow m_{BH}\cdot m_{AC}=-1\Rightarrow m_{BH}\cdot(-1)=-1\Rightarrow m_{BH}=1$.

Ecuaţia inălţimii din B se află cu formula $y-y_0=m(x-x_0)$

Inălţimea din B are ecuaţia $y-1=1(x-0)\Rightarrow x-y+1=0$.

Punctul de intersecţie a două drepte se obţine rezolvand sistemul format cu ecuaţiile celor două drepte.
Ortocentrul H este punctul de intersecţie dintre inălţimea din A şi cea din B deci coordonatele ortocentrului se obtin rezolvand sistemul $\begin{cases} x=1 \\ x-y+1=0 \end{cases}\Rightarrow H(1,2)$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Pentru $n$ număr natural se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2n+1 & n & 1 \\ 2n^2+1 & n^2 & 1 \end{pmatrix}$.

**5p** **a)** Calculaţi suma elementelor matricei $A$.

**5p** **b)** Determinaţi numerele naturale $n$ pentru care matricea $A$ are determinantul diferit de zero.

**5p** **c)** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(2n+1,n)$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Determinaţi valorile numărului natural $n$, $n\geq 2$ pentru care aria triunghiului $OA_nA_{n^2}$ este egală cu $n^2-3$.

**2.** Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x\circ y=x+ay+1$, unde $a\in\mathbb{R}$.

**5p** **a)** Pentru $a=1$ calculaţi $2011\circ 2012$.

**5p** **b)** Determinaţi numărul real $a$ pentru care legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă.

**5p** **c)** Pentru $a=-1$ rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x\circ 2^x=1$.

**Subiectul 2**

**1.a)**Suma elementelor matricei A este $0+0+1+2n+1+n+1+2n^2+1+n^2+1=3n^2+3n+5$.

**b)**Determinantul matricei A este

$$\det A=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2n+1 & n & 1 \\ 2n^2+1 & n^2 & 1 \end{vmatrix}=0+n^2(2n+1)+0-n(2n^2+1)-0-0=2n^3+n^2-2n^3-n=n^2-n=n(n-1).$$

$$\left.\begin{matrix} n(n-1)\neq 0 \\ n\in N \end{matrix}\right|\Rightarrow n\in N\setminus\{0,1\}.$$

**c)**Aria triunghiului $OA_nA_{n^2}$ este $Aria=\frac{1}{2}|\Delta|$ unde $\Delta$ este determinantul calculat la punctul b.

Numărul natural n cerut se obţine din ecuaţia $\frac{1}{2}|n^2-n|=n^2-3$

Deoarece in enunţ este pusă condiţia $n\geq 2$ rezultă $\frac{1}{2}(n^2-n)=n^2-3\Rightarrow n^2-n=2n^2-6\Rightarrow n^2+n-6=0$ care are soluţiile $n_1=2$ şi $n_2=-3$ dintre care convine numai $n_1=2$.

**2.a)** $2011\circ 2012=2011+2012+1=4024$.

**b)**Legea de compoziţie dată este asociativă dacă $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\forall x,y,z\in R$

$(x\circ y)\circ z=(x+ay+1)\circ z=x+ay+1+az+1=x+ay+az+2,\forall x,y,z\in R$

$x\circ(y\circ z)=x\circ(y+az+1)=x+a(y+az+1)+1=x+ay+a^2z+a+1,\forall x,y,z\in R$

$x+ay+az+2=x+ay+a^2z+a+1, \forall x,y,z\in R$

$\Rightarrow az+1=a^2z+a, \forall x,y,z\in R$

$\Rightarrow a=1$

**c)**Pentru $a=-1$ ecuaţia dată in exerciţiu devine $4^x-2^x+1=1\Rightarrow 4^x-2^x=0\Rightarrow \left(2^x\right)^2-2^x=0$.

Facem notaţia $2^x=t\Rightarrow t^2-t=0\Rightarrow t=0$ sau $t=1$.
Revenim la notaţia făcută şi avem:
$2^x=0$ care nu are nicio soluţie reală şi $2^x=1$ care are soluţia $x=0$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x$.

**5p** **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{3}{2}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=1$.

**5p** **c)** Demonstrați că funcția $f$ este concavă pe $(0,+\infty)$.

**2.** Pentru fiecare număr natural nenul $n$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(x+n)e^x$.

**5p** **a)** Calculați $\int_0^1 f_1(x)dx$.

**5p** **b)** Arătați că funcția $f_{2011}$ este o primitivă a funcției $f_{2012}$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x)dx\ge\dfrac{9n+5}{6}$, pentru orice număr natural nenul $n$, folosind eventual inegalitatea $e^x\ge x+1$, adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

**Subiectul 3**

**1.a)**Funcţia f este derivabilă pe $(0,+\infty)$ fiind o sumă de funcţii derivabile.

$f'(x)=(x+\ln x)'=1+\dfrac{1}{x}, \forall x>0$.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

**b)**Ecuaţia tangentei la graficul unei funcţii in punctul de pe grafic de abscisă $x_0$ este dată de formula

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Rezultă $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$f(1)=1+\ln 1=1$

$f'(1)=2$

$\Rightarrow y-1=2(x-1)\Rightarrow 2x-y-1=0$ care este ecuaţia tangentei.

**c)** $f''(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}<0, \forall x\in(0,+\infty)$ deci funcţia f este concavă pe $(0,+\infty)$.

**2.a)**Se foloseşte formula de integrare prin părţi pentru integrale definite.

$\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1(x+1)e^x dx=\int_0^1(x+1)\left(e^x\right)'dx=(x+1)e^x\Big|_0^1-\int_0^1(x+1)'e^x dx=2e-1-\int_0^1 e^x dx=2e-1-e^x\Big|_0^1=$

$=2e-1-(e-1)=e$

**b)** $f_{2011}(x)=(x+2011)e^x, x\in R$ este derivabilă pe **R**.

$f_{2012}(x)=(x+2012)e^x, x\in R$

$f'_{2011}(x)=\left[(x+2011)e^x\right]'=(x+2011)'e^x+(x+2011)\left(e^x\right)'=e^x+(x+2011)e^x=(x+2012)e^x=f_{2012}(x), \forall x\in R$

deci funcţia $f_{2011}$ este o primitivă a funcţiei $f_{2012}$.

**c)** $(x+n)e^x\geq(x+n)(x+1), \forall x\in[0,1], \forall n\in N^*$.

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1(x+n)e^x dx\geq\int_0^1(x+n)(x+1)dx=\int_0^1\left(x^2+x+nx+n\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{nx^2}{2}+nx\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+n=\frac{2+3+3n+6n}{6}=\frac{9n+5}{6}$$

c.c.t.d.

http://variante-mate.ro

**Examenul de bacalaureat național 2013**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_şt-nat***
**Barem de evaluare şi de notare**

**Model**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

- **SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $a_2 - a_1 = r \Rightarrow r = -1$ | **2p** |
| | $a_3 = 0$ | **2p** |
| | Finalizare: produsul este egal cu 0 | **1p** |
| **2.** | $\Delta = 4 + 4m < 0$ | **3p** |
| | $m \in (-\infty, -1)$ | **2p** |
| **3.** | $x(x-1) = 12 \Rightarrow x = -3$ sau $x = 4$ | **3p** |
| | $x = 4$ convine, $x = -3$ nu convine | **2p** |
| **4.** | $p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$ | **1p** |
| | Numărul numerelor $\overline{abc}$ pentru care $a \cdot b \cdot c = 3$ este egal cu $3 \Rightarrow 3$ cazuri favorabile | **2p** |
| | Numărul numerelor naturale de trei cifre este de $900 \Rightarrow 900$ cazuri posibile | **1p** |
| | $p = \dfrac{1}{300}$ | **1p** |
| **5.** | $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{2}$ | **3p** |
| | $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ | **2p** |
| **6.** | $B(0,1)$ şi $C(3,1) \Rightarrow BC \parallel Ox$, deci $x_H = x_A = 1$, unde $H$ este ortocentrul triunghiului $ABC$ | **2p** |
| | $BH \perp AC \Rightarrow m_{BH} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow \dfrac{y_H - 1}{1} \cdot \dfrac{-2}{2} = -1$ | **2p** |
| | $y_H = 2$ | **1p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | Suma elementelor matricei $A$ este egală cu $1 + (2n+1) + n + 1 + (2n^2+1) + n^2 + 1 =$ | **3p** |
| | $= 3n^2 + 3n + 5$ | **2p** |
| **b)** | $\det A = n^2 - n$ | **2p** |
| | Finalizare: $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ | **3p** |
| **c)** | $A = \dfrac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$ | **1p** |
| | $n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow n = 2$ sau $n = -3$ | **3p** |
| | Finalizare: $n = 2$ | **1p** |
| **2.a)** | $2011 \circ 2012 = 2011 + 2012 + 1 =$ | **3p** |
| | $= 4024$ | **2p** |
| **b)** | $(x \circ y) \circ z = x + ay + az + 2$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$ | **2p** |
| | $x \circ (y \circ z) = x + ay + a^2 z + a + 1$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$ | **2p** |
| | $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 1$ | **1p** |



http://variante-mate.ro

| | | |
|---|---|---|
| **c)** | $2^x = t \Rightarrow t^2 - t = 0$<br>Finalizare: $x = 0$ | **2p**<br>**3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$<br>$f'(x) = (x+\ln x)' = 1+\frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$<br>Finalizare | **2p**<br>**2p**<br>**1p** |
| **b)** | $y - f(1) = f'(1)(x-1)$<br>$f(1)=1,\ f'(1)=2$<br>Ecuația tangentei este $y = 2x-1$ | **2p**<br>**2p**<br>**1p** |
| **c)** | $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$<br>$f''(x) < 0$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$<br>Finalizare | **2p**<br>**2p**<br>**1p** |
| **2.a)** | $\int_0^1 f_1(x)\,dx = (x+1)e^x\Big\|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx =$<br>$= \left((x+1)e^x - e^x\right)\Big\|_0^1 = e$ | **2p**<br>**3p** |
| **b)** | $f_{2011}$ derivabilă și $f_{2011}'(x) = \left((x+2011)e^x\right)' = e^x + (x+2011)e^x = (x+2012)e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$<br>$f_{2011}' = f_{2012}$ | **3p**<br>**2p** |
| **c)** | $(x+n)e^x \ge (x+n)(x+1)$, pentru orice $x \in [0,1]$ și $n \in \mathbb{N}^*$<br>$\int_0^1 (x+n)e^x\,dx \ge \int_0^1 (x+n)(x+1)\,dx$<br>$\int_0^1 (x+n)(x+1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + (n+1)\frac{x^2}{2} + nx\right)\Big\|_0^1 = \frac{9n+5}{6}$<br>Finalizare | **1p**<br>**1p**<br>**2p**<br>**1p** |



http://variante-mate.ro